الوحدة الثانية

الحركة الدورانية

إعداد الأستاذ

علاء عواد

0788817681

الدرس الأول
العزم والاتزان السكوني

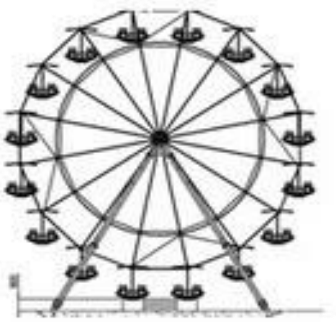
تمهيد ...

تنقسم الحركة إلى ثلاث أنوع هي: الحركة الانتقالية والحركية الاهتزازية والحركية الدورانية. في هذه الوحدة سندرس الحركة الدورانية والكميات الفيزيائية المرتبطة بها

الحركة الدورانية: هي حركة الجسم حول محور ثابت أو متحرك تحت تأثير قوة أو أكثر .

أمثلة على الحركة الدورانية

١) حركة الباب حول محوره
٢) حركة العجل
٣) حركة مفتاح الصواميل
٤) حركة شفرات المروحة

1 مفهوم العزم

التعريف

العزم : هو مقياس لمقدرة القوة على احداث دوران لجسم، وهو كمية متجهة رمزه (τ) ويُعرّف رياضيًا بأنه يُساوي ناتج الضرب المُتجهيّ لمُتجه القوّة (F) ومُتجه موقع نقطة تأثير القوّة (r) ويُقاس العزم حسب النظام الدولي للوحدات بوحدة $(\mathrm{N.m})$ ، ويُعبّر عنه بالمعادلة الآتية:

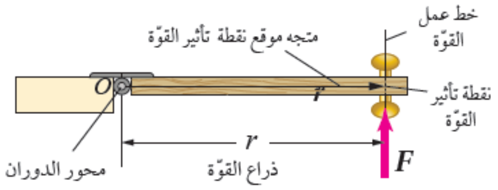
$$\boxed{\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

ملاحظات هامة....

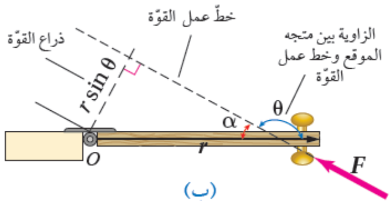
1. متجهة موقع نقطة تأثير القوة (r) : هو متجهة يبدأ من نقطة على محور الدوران وينتهي عند نقطة تأثير القوة.
2. القانون السابق يحتاج لمعرفة بعلم المتجهات لمعرفة كيفية إجراء الضرب المتجهي (لذلك لن نستخدمه)
3. العزم كمية متجهة يمكن حساب **مقداره** باستخدام القانون ← $\boxed{\tau=r\,F\sin\theta}$
   حيث (θ) الزاوية بين متجه القوة ومتجه موقع نقطة التأثير
4. يكون العزم
   - **موجب**: إذا أحدثت القوة دوران **عكس** عقارب الساعة
   - **سالب**: إذا أحدثت القوة دوران **مع** عقارب الساعة (نضيف سالب إلى قانون العزم)
5. **أكبر قيمة للعزم** تحدث عندما
   ١) تكون القوة عمودية على متجه الموقع
   ٢) تكون القوة ابعد ما يمكن عن محور الدوران
6. **اقل قيمة للعزم** تساوي صفر وتحدث عندما
   ١) تكون القوة موازية لمتجه الموقع (خط عملها يمر في محور الدوران)
   ٢) تكون نقطة تأثير القوة عند محور الدوران

مصطلحات أساسية

1. **خط عمل القوة** : هو امتداد لمتجهة القوة المؤثرة على الجسم. ونحصل عليه برسم خط ينطبق مع متجه القوة
2. **ذراع القوة** : هو البعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور دوران الجسم.



حساب مقدار ذراع القوة



(ب)

ذراع القوة هو الخط الواصل بين محور دوران الجسم وخط عمل القوة بشكل عمودي كما في الشكل المجاور ويساوي $\left(r\sin\theta\right)$ وتكون اكبر قيمه له تساوي مقدار متجه موقع نقطة تأثير القوة $\left(r\right)$ عندما تكون القوة تؤثر بشكل عمودي على متجه الموقع $\left(r\right)$ كما في الشكل في الصفحة السابقة.

انتبه.... مقدار ذراع القوة إما ان يساوي طول متجه الموقع $\left(r\right)$ أو أقل منه.

السؤال 1 اذكر العوامل التي يعتمد عليها مقدار العزم؟

1 مقدار القوة المؤثر في الجسم (طرديا)
2 طول ذراع القوة (طرديا)

السؤال 2 اذكر العوامل التي يعتمد عليها مقدار طول ذراع القوة

1 مقدار متجه موقع نقطة تأثير القوة (طرديا)
2 مقدار $\left(\sin\theta\right)$ حيث $\left(\theta\right)$ الزاوية بين متجه القوة و متجه الموقع.(طرديا)

خطوات إيجاد عزم القوة.

1 نرسم خط من محور الدوران إلى نقطة تأثير القوة (متجه الموقع)
2 نرسم خط عمل القوة
3 نحدد الزاوية $\left(\theta\right)$ بين خط عمل القوة و متجه الموقع
4 نحدد اتجاه الدوران ونطبق القانون

$$\tau=\begin{cases}+rF\sin\theta & \text{الدوران عكس عقارب الساعة}\\ -rF\sin\theta & \text{الدوران مع عقارب الساعة}\end{cases}$$

خطوات إيجاد عزم المحصلة.

إذا أثرت أكثر من قوة على الجسم فإننا

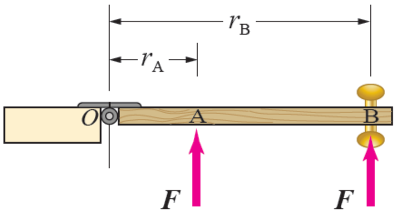
1 نجد العزم الناتج عن كل قوة لوحدها

2 نجمع العزوم الناتج من القوة جمع جبري مع مراعاة إشارة العزم لكل قوة

$$\sum\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3+.....$$

مثال (1)

في الشكل المجاور تؤثر قوتان على باب لإحداث دوران له، حدد أي من القوتين سيكون مقدار العزم لها أكبر ولماذا



الحل

القوة المؤثرة عند النقطة (B) سيكون عزمها أكبر لإنها ابعد عن محور الدوران.

مثال (2)

في الشكل المجاور تؤثر ثلاث قوة على باب عند نفس النقطة لإحداث دوران له، اعتمادا على الشكل أجب عما يلي:

1. رتب هذه القوة تصاعديا بناءاً على العزم الناتج عن كل منها
2. ما مقدار عزم القوة (F_3) ولماذا؟

الحل

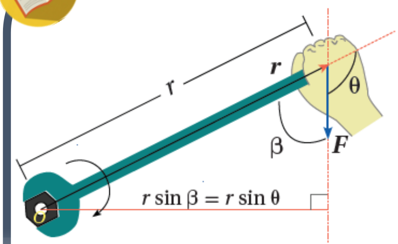
1. عزم (F_3) > عزم (F_2) > عزم (F_1)
2. العزم يساوي صفر ولذلك لإن خط عمل القوة يمر في محور الدوران حيث أن $(\theta = 0)$

انتبه.....

ينعدم العزم عندما يمر خط عمل القوة خلال محور دوران الجسم

مثال (3)

يستخدمُ زيد مفتاح شدٍّ طوله $(25cm)$ لشد صامولة في درّاجة، حيث أثر بقوةٍ مقدارُها $(160\ N)$ في طرف مفتاح الشدِّ في الاتّجاه الموضح في الشكل المجاور فإذا علمت أن مقدار الزاوية (β) يساوي (60) ؛ أحسبُ مقدارَ العزم المؤثّر في المفتاح وأحدّد اتّجاهه.



الحل

المعطيات $\beta = 60^\circ \quad F = 160 \quad r = 25cm = 0.25m$

من الشكل الزاوية بين متجهة القوة ومتجهة الموقع هي (θ)

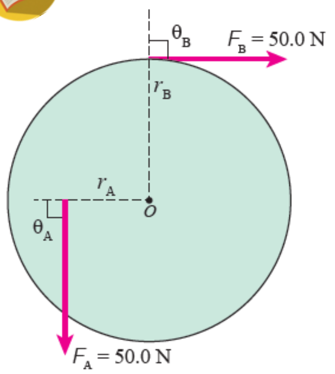
ولإن الزاويتان (β, θ) مكملتان فإن $\theta + \beta = 180^\circ \Leftarrow \sin(\theta) = \sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ولإن القوة تعمل على دوران المفتاح مع عقارب الساعة فالعزم يكون سالب إذا...

$$\tau = -r\,F\sin\theta = -(0.25)(160)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -20\sqrt{3}\ N.m$$

مثال (4)

بكرة مُصمّتة نصف قُطرها (r_B) يمرّ في مركزها (o) محور دورانٍ عموديٍّ على مستوى الصفحة؛ كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور إذا علمتَ أنّ القوة (F_A) تؤثّر في البكرة على بُعد $(r_A = 30cm)$ من محور الدوران، وتؤثر القوّة (F_B) عند حافة البكرة حيثُ $(r_B = 50cm)$ واعتمادًا على المعلومات المُثبتة في الشكل؛ أحسبُ مقدار العزم المُحصّل المؤثّر في البكرة، وأحددُ اتّجاهه



الحل

المعطيات $F_A = F_B = 50N \quad r_A = 0.3m \quad r_B = 0.5m \quad \theta_A = \theta_B = 90^\circ$

$$\tau_A = +r\,F\sin\theta$$
$$\tau_A = +(0.3)(50)\sin(90)$$
$$\tau_A = +15\,N.m$$
$$\tau_B = -r\,F\sin\theta$$
$$\tau_B = -(0.5)(50)\sin(90)$$
$$\tau_B = -25\,N.m$$
$$\sum\tau = \tau_A + \tau_B = -15 + 25 = -10\,N.m$$

ولإن العزم المحصل سالب إذا ستدور البكرة مع عقارب الساعة

مثال (5)

يدفع عامل عربةً كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور عن طريقِ التأثير في مقبضي ذراعيها بقوتين مجموعهما $(F = 1.8\times10^2\,N)$ رأسيًّا إلى أعلى لرفعهما إلى أعلى بزاوية (25°) بالنسبة لمحور $(x+)$ إذا علمتُ أن بُعد كلٍّ من مقبضي العربة عن محور الدوران (o) يساوي $(1.5m)$؛ أحسبُ مقدار عزم القوّة (F) المؤثر في العربة حول محور الدوران، و حدّد اتجاهه. علما بأن $\sin(65) = 0.9 \quad \sin(25) = 0.4$

الحل

المعطيات $r = 1.5 \quad F = 180\,N$

أولا نحدد مقدار الزاوية واتجاه الدوران كما في الشكل التالي

نجد الزاوية β من خصائص المثلث

$$25 + 90 + \beta = 180 \;\Rightarrow\; \beta = 65$$

التقابل بالرأس $\theta = \beta = 65$

ولإن اتجاه دورن عجل العربة عكس عقارب الساعة فالعزم موجب

$$\tau = +r\,F\sin\theta$$
$$\tau = +(1.5)(180)\sin(65)$$
$$\tau = +243\,N.m$$

مثال (6)

كيف أحدّد موقع نقطة تأثير القوّة واتّجاه القوة لفتح باب دوار بحيث أدفع الباب بأقلّ مقدارٍ من القوّة

الحل

أولا نحدد نقطة تأثير القوة أبعد ما يمكن عن محور الدوران ثم نؤثر على الباب بقوة عمودية عليه للحصول على كبر مقدار ممكن من العزم.

مثال (7)

رأت ذكرى أخاها يحاول فكّ إطار سيارته المثقوب باستخدام مفتاح شدٍّ لفكّ الصواميل التي تُثبّت الإطار، لكنه لم يستطع فكّها. أذكر طريقتين -على الأقل- يُمكن أن تقترحهما ذكرى على أخيها لمساعدته على فكّ الصواميل. أفسّر إجابتي.

الحل

وَصْل ماسورة في طرف مفتاح الشد لزيادة طول ذراع القوة، فيزداد العزم المحصّل المؤثر.

جعل القوة التي يؤثر بها أخيها في مفتاح الشد عمودية على المفتاح، فيزداد العزم المحصّل المؤثر.

زيادة مقدار القوة المؤثرة في مفتاح الشد، عن طريق الاستفادة من وزنه بالوقوف على طرف المفتاح بحذر.

مثال (8)

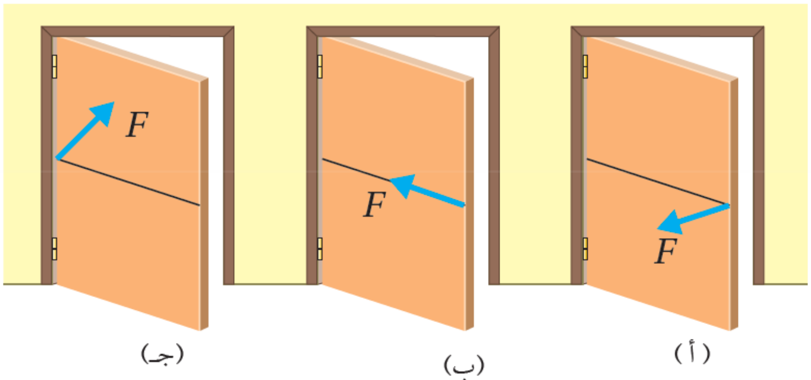
فسر لماذا عند حساب العزم المحصّل المؤثّر في جسمٍ؛ فإنّني أهملُ القوى التي يمرُ خط عملها في محور الدوران

الحل

لأن العزم الناتج عن كل من القوى المؤثرة في محور دوران الجسم، والقوى التي يمر خط عملها في محور الدوران يساوي صفر؛ لأن طول ذراع القوة يساوي صفر

مثال (9)

يوضّح الشكل قوّةً مُحصّلةً (F) ثابتة المقدار تؤثّر في الباب نفسه في مواقعَ واتّجاهاتٍ مختلفةٍ لثلاث حالات. أحدّد الحالة/الحالات التي يفتح فيها الباب، والحالة/الحالات التي لا يفتح فيها، مفسّرًا إجابتي



الحل

الشكل (أ) يفتح الباب؛ لأن خط عمل القوة عمودي على محور الدوران، والبعد بين خط عمل القوة ومحور الدوران أكبر ما يمكن.

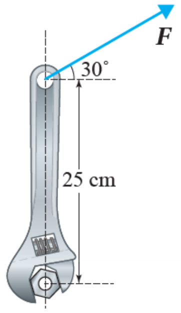
الشكل (ب): لا يفتح الباب؛ لأن خط عمل القوة يمر في محور الدوران وعزم القوة يساوي صفر.

الشكل (ج) لا يفتح الباب؛ لأن القوة تؤثر في محور الدوران، أي أن البُعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور الدوران يساوي صفراً، فيكون عزمها صفراً

مثال (10)

تستخدم فاتن مفتاح شدٍّ لشدّ صامولةٍ؛ كما هو موضح في الشكل المجاور. أستعينُ بالشكل والبيانات المثبتة فيه للإجابة عمّا يأتي، علمًا أنّ مقدار العزم اللازم لفكّ الصامولة يساوي $(50N.m)$

1. أحسبُ مقدار القوّة اللازم التأثير بها في طرف مفتاح الشدّ في الاتّجاه الموضّح في الشكل.
2. أحدّد اتّجاه دوران مفتاح الشدّ.



الحل

المعطيات $r = 0.25m \qquad \tau = 50N.m$

1

$$\tau = F\,r\sin(\theta)$$

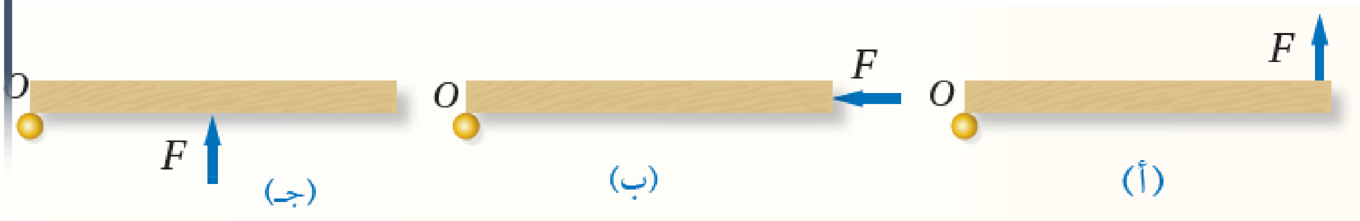
$$50 = F(0.25)\sin(60)$$

$$F = \frac{50}{0.25\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{400}{\sqrt{3}}N$$

2. مع اتجاه حركة عقارب الساعة لذا يكون عزم القوة سالبًا .

مثال (11)

يوضّح الشكل أدناه منظرًا عُلويًّا لقوّةٍ مقدارُها (F) تؤثّر في الباب نفسه عند مواقع مختلفة. أرتّب العزم الناتج عن هذه القوّة حول محور الدوران (O) تصاعديا



الحل

عزم (ب) > عزم (ج) > عزم (أ)

مثال (12)

إذا تطلب تدور جسم عزما مقداره $(55N.m)$ في حين كانت أكبر قوة يمكن التأثير بها $(220N)$ فجد مقدار طول ذراع القوة ؟

الحل

$$\tau = r\,F\sin\theta$$

$$r\sin\theta = \frac{\tau}{F} = \frac{55}{220} = 0.25m$$

مثال (13)

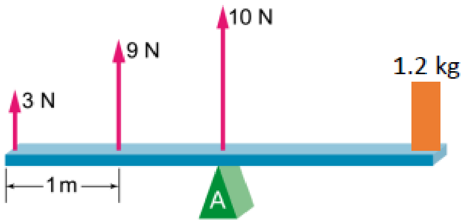
يتطلب شد برغي عزما مقداره $(8N.m)$ فإذا كان لديك مفتاح شد طوله $(0.4m)$ فما مقدار أقل قوة يجب التأثير بها في المفتاح

الحل

$$\tau = r F \sin\theta$$
$$8 = 0.4F \times \sin 90$$
$$\Rightarrow F = \frac{8}{0.4} = 20N$$

مثال (14)

قضيب طوله $(4m)$ قابل للدوران حول نقطة الارتكاز (A) عند منتصفه وضع عند أحد طرفيه قطع معدنية كتلتها $(1.2kg)$ وتؤثر فيه القوى المبينة في الشكل المجاور أحسب العزم المحصل حول النقطة (A)



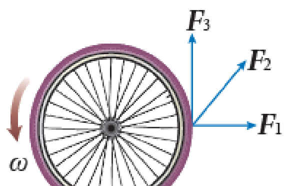
الحل

$$\tau_1 = -r F \sin\theta = -(2)(3)\sin 90 = -6N.m$$
$$\tau_2 = -r F \sin\theta = -(1)(9)\sin 90 = -9N.m$$
$$\tau_3 = r F \sin\theta = (0)(10)\sin 90 = 0$$
$$\tau_4 = -r F \sin\theta = r(mg)\sin\theta = -(2)(10\times1.2)\sin 90 = -24N.m$$
$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$
$$= (-6) + (-9) + (0) + (-24)$$
$$= -39\,N.m$$

مسائل إضافية

1- يستخدمُ خالدٌ مفتاح شدٍ لفكِّ صامولة إطار سيارة ولم يتمكّن من ذلك. يجب على خالد استخدام مفتاح شدٍّ يكون مقبضه

أ أطولَ من مقبض مفتاح الشدّ المستخدم.
ب أقصرَ من مقبض مفتاح الشدّ المستخدم
ج أكثرَ سُمكًا من سُمك مفتاح الشدّ المستخدم
د أقل سُمكًا من سُمك مفتاح الشدّ المستخدم



2- تؤثّر ثلاث قوًى لها المقدار نفسه في إطار قابلٍ للدوران حول محورٍ ثابتٍ عموديٍّ على مستوى الصفحة مارًا في مركزه. أيُّ هذه القوى يكون عزمها هو الأكبر؟

أ F_1 ب F_2 ج F_3 د جميعها لها مقدار العزم نفسه.

3- عندما تؤثر قوّةٌ في جسمٍ؛ فإن عزمها يكون صفرًا عندما

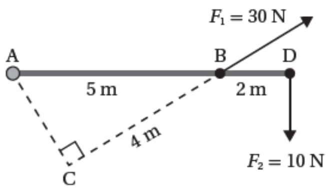
أ يتعامد مُتّجه القوّة مع مُتّجه موقع نقطة تأثيرها.
ب يتزايد مقدار السرعة الزاويّة للجسم
ج يمرُ خطُّ عمل القوّة بمحور الدوران.
د يتناقص مقدار السرعة الزاويّة للجسم.

4- تستخدم رؤى مفكًّا طولُه $(30cm)$ لفتح غطاء علبة بالتأثير في طرف المفك بقوّةٍ مقدارُها $(80N)$ عموديًّا عليه. إنّ مقدار العزم الذي تؤثّر به رؤى بوحدة $(N.m)$ يساوي:

أ 24 ب 2.67 ج 2400 د 0

5- البُعد العموديّ بين خطِّ عمل القوّة ومحور الدوران يُسمّى:

أ الإزاحةُ الزاويّة ب الموقعُ الزاويّ ج العزمُ د ذراعُ القوة



6- بالاعتماد على البيانات المثبّتة على الشكل المجاور ، فإنّ مقدار العزم المحصّل حول محور عمودي على مستوى الصفحة ويمرّ بالنقطة (A) بوحدة (N.m) يساوي:

أ 50 ب 80 ج 20 د 160

الحلول

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦
الحل	أ	ج	ج	أ	د	ج

سـؤال

يسحب شخصان حبلين ملفوفين حوله حافة إطار كبير فإذا كانت كتلة الإطار $(12kg)$ وقطره $(2.4m)$ ويسحب أحد الشخصين الحبل الأول في اتجاه حركة عقارب الساعة بقوة $(40N)$ ويسحب الشخص الآخر الحبل الثاني في اتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة بقوة $(60N)$ فما محصلة العزم على الإطار ؟ علما أن كل من الحبلين يصنع زاوية عمودية مع متجه الموقع

الحل

$$\tau_1 = -r\,F\sin\theta = -(1.2)(40)\sin 90 = -48N.m$$

$$\tau_2 = r\,F\sin\theta = (1.2)(60)\sin 90 = +72N.m$$

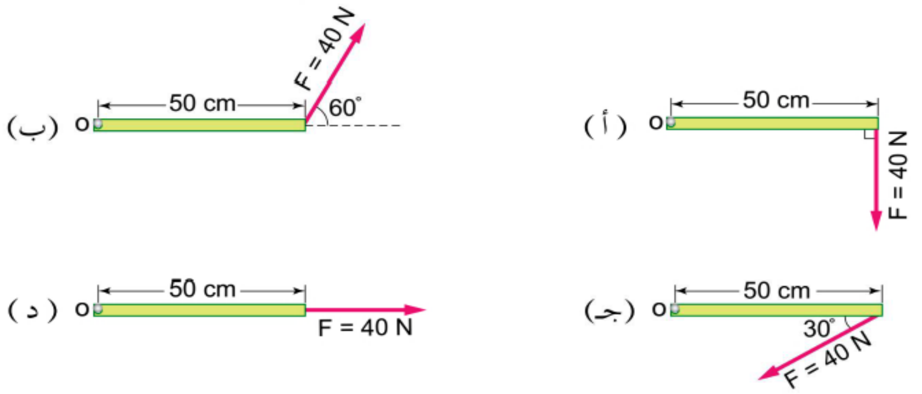
$$\sum\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$= -48 + 72 = 24N.m$$

وبما أن العزم المحصل موجب إذا فاتجاه الحركة سيكون بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة

سـؤال

يبين الشكل المجاور قضيبا قابلا للدوران حول المحور العامودي (O) على مستوى الصفحة احسب مقدار عزم القوة واتجاهه في كل من الحالات الموضحة في الشكل



الحل

1) $\tau = -r\,F\sin\theta = -(0.5)(40)\sin 90 = -20N.m$

واتجاه الحركة مع اتجاه حركة عقارب الساعة

2) $\tau = +r\,F\sin\theta = +(0.5)(40)\sin 60 = +10\sqrt{3}N.m$

واتجاه الحركة عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

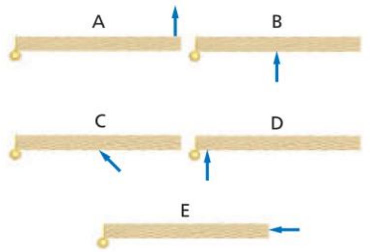
3) $\tau = -r\,F\sin\theta = -(0.5)(40)\sin 150 = -10N.m$

واتجاه الحركة مع اتجاه حركة عقارب الساعة

4) $\tau = -r\,F\sin\theta = -(0.5)(40)\sin 0 = 0$

سؤال

رتب العزوم المؤثرة في الأبواب الخمسة الموضحة في الشكل المجاور من الأقل إلى الأكبر مع العلم أن مقدار القوة هو نفسه في الأبواب كلها

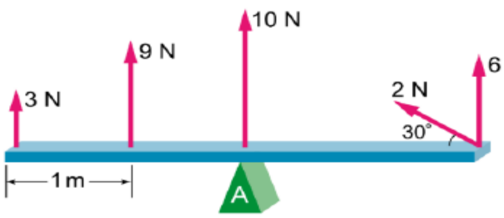


الحل

$\tau_A > \tau_B > \tau_C > \tau_D > \tau_E$

سؤال

قضيب طوله $(4m)$ قابل للدوران حول نقطة الارتكاز (A) عند منتصفه وتؤثر فيه القوى المبينة في الشكل المجاور احسب العزم المحصل لتلك القوة حول النقطة (A)



الحل

$$\tau_1 = -r\,F\sin\theta = -(2)(3)\sin 90 = -6N.m$$
$$\tau_2 = -r\,F\sin\theta = -(1)(9)\sin 90 = -9N.m$$
$$\tau_3 = r\,F\sin\theta = (0)(10)\sin 90 = 0$$
$$\tau_4 = r\,F\sin\theta = (2)(6)\sin 90 = +12N.m$$
$$\tau_5 = r\,F\sin\theta = (2)(2)\sin 150 = +2N.m$$
$$\sum\tau = \tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5$$
$$=(-6)+(-9)+(0)+(12)+(2)$$
$$=-1N.m$$

بما أن العزم سالب إذا فاتجاه الحركة بنفس اتجاه حركة عقارب الساعة

سؤال

إذا كان نصف القطر إطار دراجة هوائية $(10cm)$ وأثرت قوة عامودية عند طرف الاطار مقدارها $(40N)$ في اتجاه حركة عقارب الساعة فما مقدار العزم اللازم لمنع الإطار من الدوران

الحل

يتأثر الإطار بعزم مقداره

$$\tau = -r\,F\sin\theta = -(0.1)(40)\sin 90 = -4N.m$$

لذلك لمنع الإطار من الدوران لا بد أن نؤثر عليه بقوة أخرى له عزم مقداره $\tau = +4N.m$

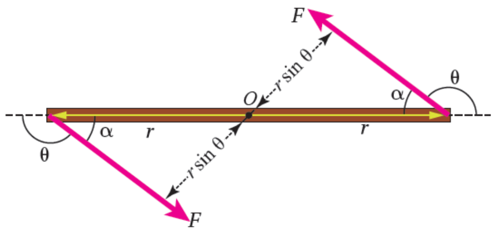
2 عزم الازدواج

التعريف

عزم الازدواج : هو العزم المحصل الناتج عن قوتين متساويتين مقدارًا ومتعاكستين اتجاهًا وخطّا عملهما غير متطابقين؛ ويساوي ناتج ضرب مقدار احدى القوتين المتساويتين (F) في البعد العمودي بينهما (d)

$$\tau_{couple} = F\,d$$

توضيح....

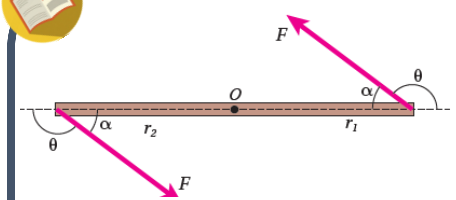


البعد العمودي بين القوتين يساوي $(d = 2r\sin\theta)$ أي انه يساوي ضعفي طول ذراع القوة لاحد القوتين كما هو موضح في الشكل المجاور .

السؤال 1 على ماذا يعتمد مقدار عزم الازدواج

الجواب: 1 مقدار احدى القوتين المتساويتين 2 البعد العمودي بينهما

مثال (1)



مسطرةٌ فلزيّةٌ طولها $(1m)$ قابلةٌ للدوران حول محورٍ ثابتٍ يمرُّ في منتصفها عند النقطة (O) عموديٍّ على مستوى الصفحة كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور أثّر فيها قوتان شكّلتا ازدواجًا، فإذا علمتَ أنّ مقدار كلٍّ من القوتين $(80N)$ ومقدار الزاوية $(\theta = 143^{\circ})$ أحسبُ مقدار عزم الازدواج المؤثّر في المسطرة، وأحدّد اتجاهه علما بأن $(\sin 37^{\circ} = 0.6)$

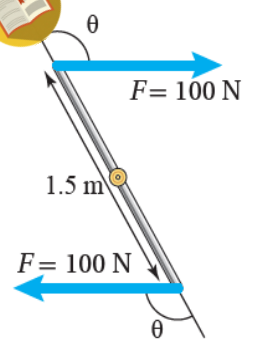
الحل

المعطيات $\theta = 143^{\circ}$ $r_1 = r_2 = 0.5$ $F = 80N$

لإن القوتان تعملان على تدوير الجسم عكس عقارب الساعة فإن عزم الازدواج الناتج عنهما يكون موجبا

$$\tau_{couple} = +F\,d$$
$$\tau_{couple} = +2Fr\sin(\theta)$$
$$\tau_{couple} = +2(80)(0.5)\sin(143)$$
$$\tau_{couple} = +48N.m$$

مثال (2)



قوّتان متوازيتان متساويتان مقدارًا ومتعاكستان اتّجاهًا، مقدار كُلٍّ منهما $(100\,N)$ تؤثران عند طرفي قضيبٍ فلزيّ طوله $(1.5m)$ قابلٍ للدّوران حول محورٍ ثابتٍ عند منتصفه عموديٍّ على مستوى الصفحة، كما هو موضّحٌ في الشكل. إذا كان العزم الكليُّ المؤثر في القضيب $(130\,N.\text{m})$ باتّجاه حركة عقارب الساعة؛ أحسبُ مقدار الزاوية التي يصنعُها خطُّ عملِ كلِّ قوّةٍ مع مُتّجه موقع نقطةِ تأثيرها

الحل

المعطيات $r=\dfrac{1.5m}{2}=0.75m \quad F=100\,N \quad \sum\tau=-130N.m$

$$\tau_{couple}=-F\,d$$
$$\tau_{couple}=-2Fr\sin(\theta)$$
$$-130=-2(100)(0.75)\sin(\theta)$$
$$\sin(\theta)=\frac{-130}{-2(100)(0.75)}=\frac{130}{150}=$$
$$\Rightarrow \theta=\sin^{-1}(0.866)=60^{\circ}\ or\ 120^{\circ}$$

ولإنها منفرجة فيكون قياسها (120°)

مثال (3)

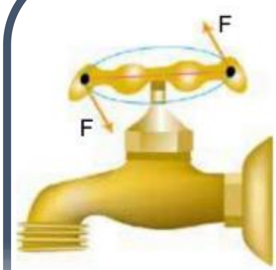
لتدوير مقبض صنبور الماء؛ أثرتْ فيه بقوتين مقدارُ كُلٍّ منهما $(3N)$ باتّجاهين متعاكسين، وعموديًّا على طول المقبض. إذا علمتُ أن طول المقبض $(8cm)$؛ فما مقدار عزم الازدواج المؤثر في مقبض الصنبور .

الحل

المعطيات $d=0.08m \quad F=3N$

$$\tau_{couple}=F\,d$$
$$\tau_{couple}=(3)(0.08)=0.24\,N.m$$

مثال (4)



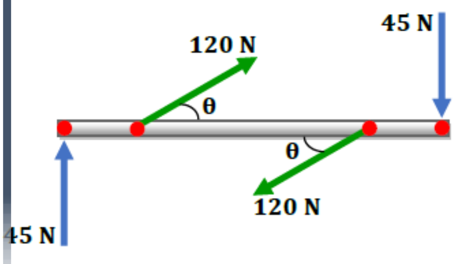
لتدوير مقبض صنبور الماء أثرت فيه قوتين مقدار كل منهما $(3N)$ باتجاهين متعاكسين وعموديا على طول المقبض إذا علمت أن طول المقبض $(8cm)$ فما مقدار عزم الازدواج المؤثر في مقبض الصنبور

الحل

$$\tau_{couple}=Fd=3\times0.08=0.24N.m$$

مثال (5)

يبين الشكل المجاور قضيب أفقي طوله $(60cm)$ وتؤثر عليه قوتان رأسيتان مقدار كل منهما $(45N)$ عند النقطتين (a,b) في اتجاهين متعاكسين وتؤثر قوتان أخريان مقدار كل منهما $(120N)$ في اتجاهين متعاكسين عند النقطتين (c,d) البعد بينهما $(45cm)$ إذا كانت القوتان تكونان ازدواجا مكافئا للازدواج الذي كونتاه القوتان الأوليان فأوجد قياس الزاوية التي تصنعها القوتان الأخريان مع القضيب علما أن محور دوران القضيب يقع في منتصفه



الحل

$$\tau_{couple(1)} = -F\,d = -(45)(0.6) = -27\,N.m$$

$$\tau_{couple(2)} = -F\,d = -(120)(d)$$

$$-27 = -120 \times d$$

$$\Rightarrow d = 0.225$$

$$d = 2r\sin\theta$$

$$0.225 = 2 \times \frac{0.45}{2} \times \sin\theta \quad \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = 30^{o}$$

مسائل إضافية

1- يكونُ جسمٌ واقع تحت تأثير عزم ازدواج عندما:

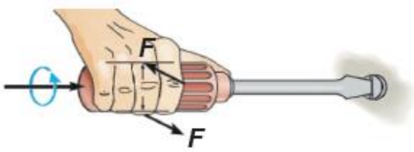
أ يكون متزنًا؛ أي تكون القوّة المُحصّلة والعزم المحصّل المؤثّران فيه يساويان صفرًا.

ب تؤثّر فيه قوّتان لهما المقدار نفسه والاتّجاه نفسه، وخطّا عملهما متطابقان

ج تؤثّر فيه قوّتان لهما المقدار نفسه، متعاكستان في الاتّجاه، وخطّا عملهما غير متطابقين

د تؤثّر فيه قوّتان لهما المقدار نفسه، والاتّجاه نفسه، وخطّا عملهما غير متطابقين.

2-تستخدم سلمى مفكّ براغي لفكّ برغيٍّ من خِزانتها ولم تتمكّن من ذلك. يجب على سلمى استخدام مفكّ براغي يكون مقبضه



أ أطولَ من مقبض المفكّ المستخدم.

ب أقصرَ من مقبض المفكّ المستخدم.

ج أكثرَ سُمكًا من سُمك المقبض المستخدم.

د أقلَّ سُمكًا من سُمك المقبض المستخدم.

السؤال	١	٢
الحل	ج	ج

3 الاتزان

أنواع الاتزان

1 اتزان سكوني: جسم ساكن لا يتحرك $(v=0)$

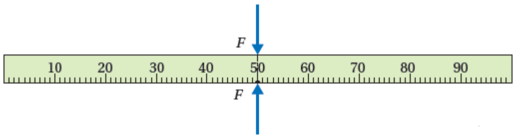
2 اتزان انتقالي : جسم يتحرك بسرعة ثابتة في خط مستقيم $(a=0)$

$$\sum \boldsymbol{F}=0$$

أثر موقع تأثير القوة على الاتزان

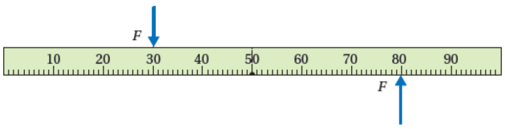
1 قوتان تؤثران في نفس النقطة.

عندما تؤثر قوتان متساويتان مقداراً ومتعاكستان اتجاهاً في جسم ساكن عند نفس النقطة كما في الشكل المجاور فإن الجسم يكون في حالة اتزان سكوني ولا يتحرك ابداً



2 قوتان تؤثران في نقطتين مختلفتين

عندما تؤثر قوتان متساويتان مقدار ومتعاكستين اتجاهاً، ولكن في نقطتين مختلفتين (خطا عمل القوتين غير متطابقين) كما في الشكل المجاور فإن الجسم سوف يتحرك حركة دورانية بالرغم من ان محصلة القوى عليه تساوي صفر



شرطا الاتزان

حتى يتزن الجسم اتزان سكوني لا بد من أن يتحقق الشرطين الآتيين:

الشرط الأول: أن تكون محصلة القوة المؤثرة على الجسم تساوي صفر $\sum \boldsymbol{F}=0$

الشرط الثاني : أن يكون العزم المحصل المؤثر على الجسم يساوي صفر $\sum \tau=0$

خطوات حل أسئلة الاتزان....

1 نحدد القوة المؤثرة على الجسم

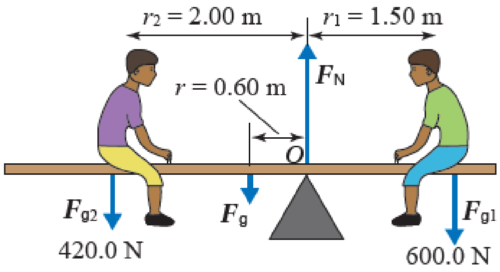
2 نحدد القوة المجهولة المؤثرة على الجسم

3 نحدد موقع محور الدوران عند احدى القوة المجهولة ونطبق شرط العزم $\sum \tau=0$

4 نطبق شرط القوة لإيجاد القوة المجهولة الثانية

مثال (1)

يجلس فادي (F_{g1}) وصقر (F_{g2}) على جانبي لعبة اتزن $(see - saw)$ تتكون من لوح خشبي منتظم متماثل وزنه (F_g) يؤثر في منتصفه، يرتكز على نقطة تبعد $(0.6m)$ يمين منتصف اللوح الخشبي، كما هو موضح في الشكل المجاور إذا كان النظام المكوّن من اللعبة والطفلين في حالة اتزان سكوني واللوح الخشبي في وضع أفقي، ومستعينا بالبيانات المثبتة على الشكل أحسب مقدار ما يأتي:



1. وزن اللوح الخشبي (F_g)
2. القوة (F_N) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح الخشبي

الحل

المعطيات: موضحة في الشكل

يتأثر اللوح الخشبي بأربع قوى هي :

وزن الطفلين $(F_{g1} = 600N \quad F_{g2} = 420N)$ و وزن اللوح نفسه (F_g) والقوة (F_N)

الان نخدد موقع القوة عند إحدى القوتين المجهولتين مثلا عند (F_N) كما في الشكل

$$\sum \tau = 0$$
$$-\tau_{g_1} + \tau_{g_2} + \tau_g + \tau_N = 0$$
$$-F_{g1} r_1 \sin\theta + F_{g2} r_2 \sin\theta + F_g r_g \sin\theta + F_N r_N \sin\theta = 0$$
$$-(600)(1.5)(1) + (420)(2)(1) + (F_g)(0.6)(1) + (F_N)(0) = 0$$
$$-900 + 840 + 0.6F_g = 0 \Rightarrow F_g = 100N$$

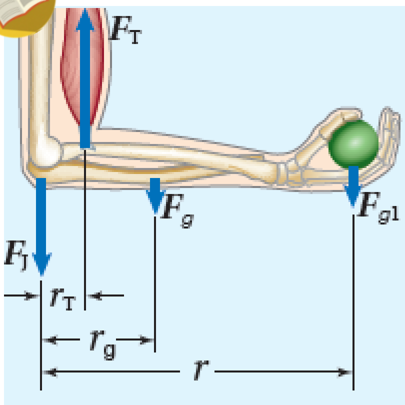
الان بتطبيق شرط القوة نجد القوة الثانية

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$
$$F_{g1} + F_{g2} + F_g - F_N = 0$$
$$600 + 420 + 100 - F_N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = 1120N$$

طريقة ثانية : بفرض موقع محور الدوران عند (F_g)

$$\sum \tau = 0$$
$$-\tau_{g_1} + \tau_{g_2} + \tau_g + \tau_N = 0$$
$$-F_{g1} r_1 \sin\theta + F_{g2} r_2 \sin\theta + F_g r_g \sin\theta + F_N r_N \sin\theta = 0$$
$$-(600)(2.1)(1) + (420)(1.4)(1) + (F_g)(0) + (F_N)(0.6)(1) = 0$$
$$-1140 + 588 + 0.6F_N = 0 \Rightarrow F_N = 1120N$$
$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$
$$F_{g1} + F_{g2} + F_g - F_N = 0$$
$$600 + 420 + F_g - 1120 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_g = 100N$$

مثال (2)



ترفع جنان بيدها ثقلاً وزنه $(40N)$ في أثناء ممارستها للتمارين الرياضية في نادٍ رياضيّ. إذا علمتُ أنّ نقطة التقاء العضلة ثنائيّة الرأس بالساعد تبعدُ $(r_T = 5cm)$ عن المرفق، ووزن عظم الساعد والأنسجة فيه $(30N)$ ويؤثر على بُعد $(r_g = 15cm)$ عن المرفق، وبُعد نقطة تأثير القوّة في اليد $(r = 35cm)$ عن المرفق، والساعد متزنٌ أفقيا في الوضع الموضّح في الشكل المجاور فأحسبُ مقدار ما يأتي:

1. قوّة الشدّ في العضلة (F_T) المؤثّرة في الساعد بافتراضها رأسيًّا لأعلى
2. القوّة التي يؤثّر بها المرفق في الساعد (F_J)

الحل

المعطيات: $r = 0.35m$ $\quad r_g = 0.15m$ $\quad r_T = 0.05m$ $\quad F_g = 30N$ $\quad F_{g1} = 40N$

القوة المؤثرة في اليد : $F_J = ??$ $\quad F_T = ??$ $\quad F_g = 30N$ $\quad F_{g1} = 40N$

بتحديد محور الدوران عند القوة (F_J)

1

$$\sum \tau = 0$$
$$-\tau_{g_1} - \tau_g + \tau_T = 0$$
$$-F_{g1} r \sin\theta - F_g r_g \sin\theta + F_T r_T \sin\theta = 0$$
$$-(40)(0.35)(1) - (30)(0.15)(1) + 0.05F_T = 0$$
$$-14 - 4.5 + 0.05F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_T = 370N$$

2

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$
$$F_{g1} + F_g + F_J - F_T = 0$$
$$30 + 40 + F_J - 370 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_J = 300\,N$$

مثال (3)

أقارنُ بين الاتّزان السكونيّ والاتّزان الانتقالي من حيث: القوّة المُحصلّة المؤثّرة، السرعة الخطيّة، التسارعُ الخطيّ.

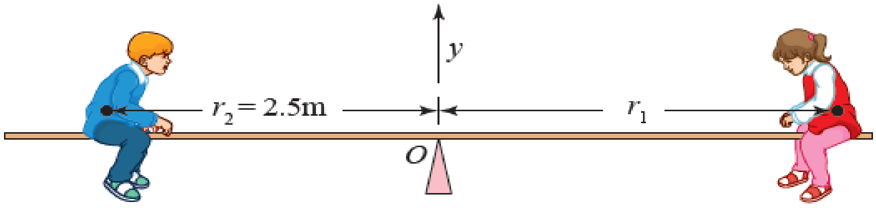
الحل

	القوة المحصلة المؤثرة	السرعة الخطية	التسارع الخطي
الاتزان السكوني	صفر	صفر	صفر
الاتزان الانتقالي	صفر	سرعة ثابتة	صفر

مثال (4)

لعبة اتّزان $(\text{see-}saw)$ تتكوّن من لوح خشبيٍّ مُنتظمٍ مُتماثلٍ وزنهُ $(150N)$ يرتكزُ من منتصفه عند النقطة (O) تجلس نهى (F_{g1}) على أحد طرفي اللوح الخشبي على بُعد (r_1) من نقطة الارتكاز؛ بينما يجلس شقيقها ماهر (F_{g2}) على الجهة المقابلة على بُعد $(2.5m)$ من نقطة الارتكاز. إذا علمتَ أنّ وزن نهى $(250N)$ ووزن ماهر $(300N)$ والنظام في حالة اتّزان سكونيّ، واللوح الخشبيّ في وضع أفقيّ كما هو موضح في الشكل؛ أحسب مقدار ما يأتي:

1. القوّة (F_N) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح الخشبيّ، وأحدّد اتّجاهها.
2. بُعد نهى عن نقطة الارتكاز كي يكون النظام في حالة اتّزان سكونيّ.



الحل

المعطيات: موضحة في الشكل

يتأثر اللوح الخشبي بأربع قوى هي:

وزن الطفلين $(F_{g2} = 300N \quad F_{g1} = 250N)$ و وزن اللوح نفسه (F_g) والقوة (F_N)

الان نحدد موقع محور دوران في منتصف اللعبة

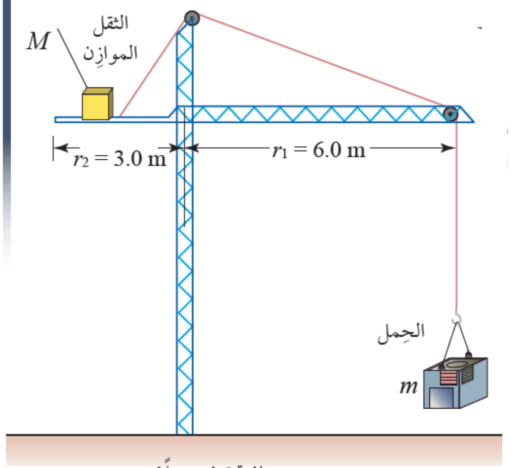
$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_{g_1} - \tau_{g_2} = 0$$
$$F_{g1} r_1 \sin\theta - F_{g2} r_2 \sin\theta = 0$$
$$(300)(2.5)(1) - (250)(r)(1) = 0 \quad \Rightarrow r = 3m$$

الان بتطبيق شرط القوة نجد القوة الثانية

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$
$$F_{g1} + F_{g2} + F_g - F_N = 0$$
$$250 + 300 + 150 - F_N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = 700N$$

مثال (5)

تُستخدم بعضُ أنواع الروافع لرفع الأثقال الكبيرة (الأحمال) إلى أعالي الأبراج والبنايات العالية. ويجب أن يكون العزم المُحصّل المؤثر في هذه الرافعة صفرًا؛ كي لا يوجد عزم مُحصّل يعمل على إمالتها وسقوطها؛ لذا يوجد ثقلٌ (M) على الرافعة لتحقيق اتّزانها، حيث يُحرك عادةً هذا الثقل تلقائيًّا (بشكل أوتوماتيكي) عبر أجهزة استشعار ومحرّكاتٍ لموازنة الحِمل بدقّة. يبيّن الشكل المجاور رافعةً في موقع بناءٍ ترفع حِملًا مقداره $(3000kg)$ ومقدار الثقل الموازن $(10000kg)$ أستعينُ بالشكل والبيانات المثبّتة فيه للإجابة عمّا يأتي مهملًا كُتلة الرافعة؛ علمًا أن الرافعة متزنة أفقيًّا.



رافعة ترفع حِملًا.

1 أحدّد موقع الثقل الموازن عندما يكون الحِمل مرفوعًا عن الأرض وفي حالة اتّزان سكوني.

2 أحدّد مقدارَ أكبر كتلة يُمكن أن تحملها الرافعة عندما يكون موقع الثقل الموازن عند طرفها.

الحل

المعطيات: موضحة في الشكل

1

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_M - \tau_m = 0$$
$$F_{gM} r_2 \sin\theta - F_{gm} r_1 \sin\theta = 0$$
$$(10000\times100)(r_2)(1) - (3000\times10)(6)(1) = 0$$
$$\Rightarrow r_2 = 1.8m$$

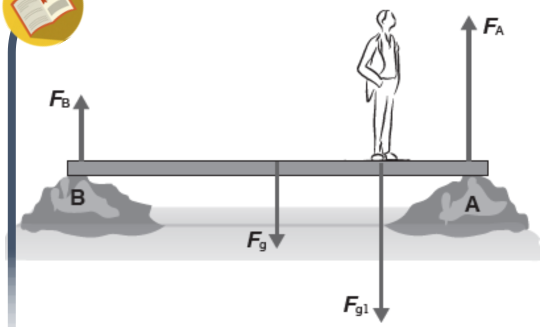
2

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_M - \tau_m = 0$$
$$F_{gM} r_2 \sin\theta - F_{gm} r_1 \sin\theta = 0$$
$$(10000\times10)(3)(1) - (F_{gm})(6)(1) = 0$$
$$\Rightarrow F_{gm} = 50000kg$$
$$F_{gm} = m\times g$$
$$50000 = m\times10 \qquad \Rightarrow m = 5000kg$$

مثال (6)

يوضّح الشكل المجاور جسرًا خشبيًّا مُنتظمًا متماثلاً طوله $(8m)$ ووزنه $(200N)$ يرتكزُ طرفيه على ضفّتي نهر . إذا وقف شخصٌ وزنه $(800N)$ على بُعد $(2m)$ من الطرف (A) وكان اللّوح مُتّزنًا أحسب مقدار ما يأتي:

1. القوّة العموديّة المؤثّرة في الطرف (A) من الجسر
2. القوّة العموديّة المؤثّرة في الطرف (B) من الجسر



الحل

المعطيات: $F_g = 200N \quad d = 8m \quad F_{g1} = 800N$

بفرض محور الدوران عند النقطة (B)

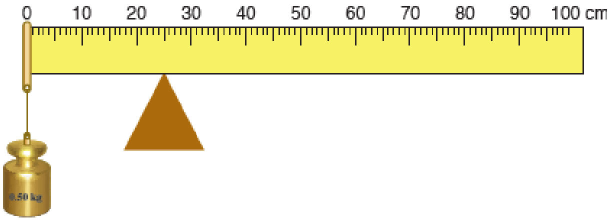
1

$$\sum \tau = 0$$
$$-\tau_g - \tau_{g1} + \tau_A = 0$$
$$-F_g r_g \sin\theta - F_{g1} r_{g1} \sin\theta + F_A r_A \sin\theta = 0$$
$$-(200)(4)(1) - (800)(6)(1) + (F_A)(8)(1) = 0$$
$$\Rightarrow F_A = 700\,N$$

2

$$\sum F = 0$$
$$F_A + F_B - F_g - F_{g1} = 0$$
$$700 + F_B - 200 - 800 = 0$$
$$F_B = 300N$$

مسائل إضافية



1- مسطرةٌ متريّةٌ مُنتظمةٌ متماثلةٌ ترتكزُ على نقطةٍ عند التدريج $(25cm)$ عُلّق ثقلٌ كتلتُه $(0.5kg)$ عند التدريج $(0cm)$ للمسطرة، فاتّزنت أفقيًّا، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور. إنّ مقدار كتلة المسطرة المتريّة يساوي

أ $0.25kg$	ب $0.5kg$	ج $0.1kg$	د $0.2kg$

2-يجلس طفلان على طرفي لعبةٍ $(see-saw)$ مُتزنةٍ أفقيًّا. عند تحرُّك أحد الطفلين مُقتربًا من نقطة الارتكاز؛ فإنّ الطرفَ الذي يجلس عليه:

أ يرتفع لأعلى.	ب ينخفض لأسفل.
ج يبقى في وضعه الأفقي ولا يتغير.	د قد يرتفع أو ينخفض حسب وزن الطفل.

3-يجلس خالدٌ $(60kg)$ وعاهد $(50kg)$ على طرفي لعبةٍ $(see-saw)$ مُتزنةٍ أفقيًّا، تتكون من قضيبٍ فلزيٍّ منتظمٍ يرتكز عند نقطةٍ في منتصفه. إذا كان بُعد خالد (1.5) عن نقطة الارتكاز، فإنّ بُعدَ عاهد عن النقطة نفسها بوحدة (m) يساوي:

أ 1.25	ب 1.8	ج 3	د 2

الحلول

السؤال	١	٢	٣
الجواب	ب	أ	ب

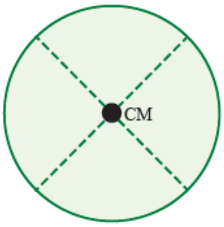
4 مركز الكتلة

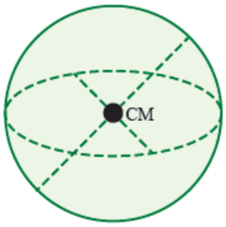
التعريف

مركز الكتلة : هو النقطة التي يُمكن اعتبار كتلة الجسم كاملة مركزة فيها وقد يقعُ مركز الكتلة داخل الجسم أو خارجه، اعتمادًا على شكل الجسم

تحديد موقع مركز الكتلة لجسم واحد:

1 للأشكال المنتظمة والمتماثلة



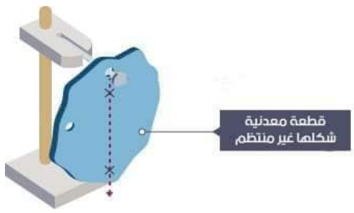


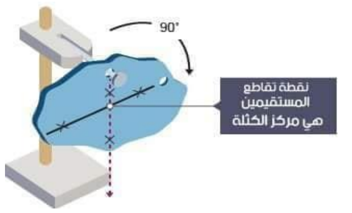
ينطبقُ موقع مركز كتلة أي جسمٍ مُتماثلٍ مُنتَظم توزيع الكتلة (متجانس) على **مركزه الهندسيّ.**

مثال:

يقع مركز كتلة قضيب فلزيّ منتظم داخله، وفي منتصف المسافة بين نهايتيه.
يقع مركز كتلة مسطرة، أو أسطوانة، أو كرة، أو مكعب في المركز الهندسي لكلٍّ منها
مركز كتلة كرةٍ مجوّفةٍ يقع في مركزها بالرغم من عدم وجود مادّة الكرة عند تلك النقطة
مركز كتلة حلقةٍ دائريّةٍ يقع في مركزها بالرغم من عدم وجود مادّة الحلقة عند تلك النقطة

2 للأشكال غير المنتظمة و غير المتماثلة





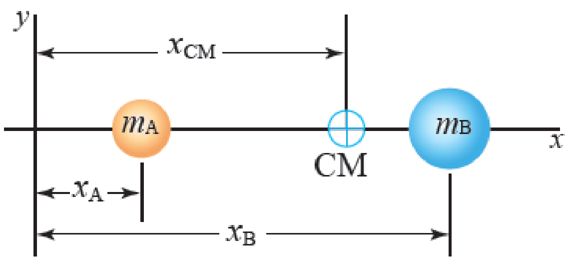
يكون مركزُ كتلته أقرب إلى المنطقة ذات الكتلة الأكبر . وتحدد عملية في المختبر

خطوات تحديد مركز الكتلة لجسم غير منتظم

- تثقب الجسم من عدة أماكن مختلفة
- نعلق الجسم على الحامل الفلزي من احدى الأماكن المثقوبة في الخطوة الأولى حتى يستقر ثم نرسم خط عند موضوع استقرار خط الخطاف المعلق بالحامل الفلزي مع الجسم
- نعيد الخطوة السابقة بعد تعليق الجسم من ثقوب مختلفة
- نقطة تقاطع الخطوط السابقة هي مركز الكتلة

تحديد موقع مركز الكتلة لنظام يتكون من عدة أجسام:

يقع مركز كتلة النظام الفيزيائي على الخط الواصل بين الاجسام واقرب إلى الجسم ذو الكتلة الأكبر وإذا كانت الاجسام متساوية في الكتلة فيكون مركز الكتلة في المنتصف ويمكن تحديد مكانه بدقة باستخدام القاعدة التالية:



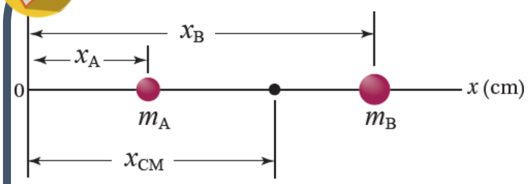
$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + ...}{m_A + m_B + ...}$$

ملاحظات هامة....

1. موقع مركز كتلة الجسم أو النظام دائما يكون أقرب إلى الكتلة الأكبر
2. عند تعليق جسم من مركز كتلته فإنه يتزن وذلك لإن العزم المحصل عنده يساوي صفر (مهم جدا)

مثال (1)

نظام يتكون من كرتين $(m_A = 1kg\ ,\ m_B = 3kg)$ كما هو موضح في الشكل المجاور . إذا علمت أن $(x_A = 5cm\ ,\ x_B = 15cm)$ فأحدّد موقع مركز كتلة النظام.



الحل

المعطيات: $m_A = 1kg\ ,\ m_B = 3kg \quad x_A = 0.05m\ ,\ x_B = 0.15m$

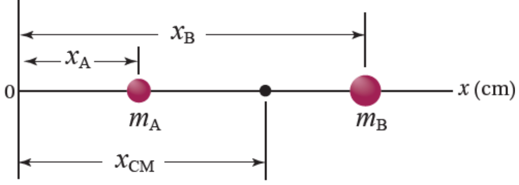
$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$x_{cm} = \frac{(1)(0.05)+(3)(0.15)}{(1+3)} = 0.125m = 12.5cm$$

أي أن مركز الكتلة يبعد عن الكتلة (m_B) مقدار $(2.5cm)$ وعند الكتلة (m_A) مسافة مقدارها $(7.5cm)$

مثال (2)

نظام يتكون من كرتين $(m_A = 4kg\ ,\ m_B = 4kg)$ كما هو موضح في الشكل المجاور . إذا علمت أن $(x_A = 5cm\ ,\ x_B = 15cm)$ فأحدّد موقع مركز كتلة النظام.



الحل

المعطيات: $m_A = 4kg\ ,\ m_B = 4kg \quad x_A = 0.05m\ ,\ x_B = 0.15m$

$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$x_{cm} = \frac{(4)(0.05)+(4)(0.15)}{(4+4)} = 0.1m = 10cm$$

أي أن مركز الكتلة يبعد عن كلا الجسمين مسافة متساوية مقدارها $(5cm)$

مثال (3)

أثرت قوى عدّة في جسم؛ بحيث تمرُّ خطوط عملها في مركز كتلته، وكانت القوّة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرًا. هل يكون الجسم مُتزنًا أم لا؟ أفسّر إجابتي.

الحل

بما أن القوة المحصّلة المؤثرة فيه تساوي صفر فقد تحقق الشرط الأول للاتزان. وحيث أن خطوط عمل القوى تمر في نقطة واحدة فإن العزم المحصّل لها يساوي صفر (الشرط الثاني) للاتزان لذا يكون الجسم متزنًا .

مثال (4)

توضَعُ قطع رصاصٍ على أطراف الأجزاء الفلزيّة من إطارات السيارات لمنعها من الاهتزاز في أثناء دورانها. أتوقّع أين توجد مواقع مراكز كُتَل هذه الإطارات بعد وضع قطع الرصاص عليها.

الحل

عند حدوث عدم تماثل في توزيع كتلة الإطار (حدوث تآكل في بعض أجزاء العجل مثلا)، لا ينطبق مركز كتلة الإطار مع مركزه الهندسي الذي يمر فيه محور الدوران، ما يسبب اهتزاز عجل السيارة خصوصا عند السرعات العالية. ولضمان توزيع منتظم لكتلة الإطار بحيث ينطبق مركز كتلته مع مركزه الهندسي يتم إضافة قطع من الرصاص لاستعادة توزيع منتظم لكتلة العجل حول محور الدوران. هذا بدوره يؤدي إلى توقف الإطار عن الاهتزاز عند السرعات المرتفعة.

مثال (5)

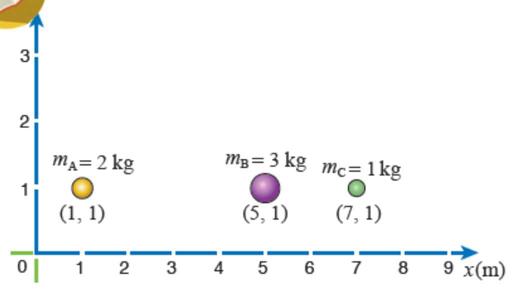
قطعة بوليسترين على شكل خارطة المملكة الأردنيّة الهاشميّة. كيف أحدّد مركز كُتلتِها عمليًا؟

الحل

أثقب ثقبين صغيرين متباعدين عند حافة قطعة البوليسترين، ثم أعلّقها بخيط من أحدهما رأسيا في الهواء، وعند توقّف قطعة البوليسترين عن التأرجح أرسم خطًّا عليها على امتداد طول الخيط. ثم أعلّق قطعة البوليسترين من الثقب الثاني وأكرّر ما عملته سابقًا. يقع مركز الكتلة في منتصف المسافة بين سطحي قطعة البوليسترين تحت نقطة تقاطع هذين الخطين

مثال (6)

نظامٌ يتكوّن من ثلاثة جُسيمات؛ كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور. أستعينُ بالشكل والبيانات المثبّتة فيه لأحدّد موقع مركز كتلة النظام



الحل

المعطيات: من الرسم

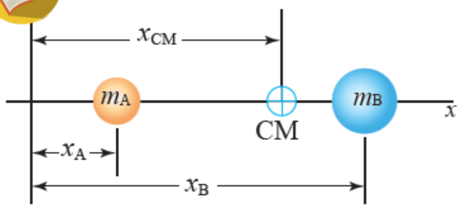
$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$x_{CM} = \frac{(2)(1)+(3)(5)+(1)(7)}{(2+3+1)} = 4m$$

أي أن مركز الكتلة يقع عند النقطة $(4, 1)$

مثال (7)

يكون العزم المحصّل لجسيمات نظام حول مركز كتلته يساوي صفراً . استخدام هذه الطريقة لتحديد مركز الكتلة للنظام المبين في الشكل المجاور



الحل

عندما يكون محور الدوران عند مركز الكتلة $\left(x_{CM}\right)$ فإن العزم المحصل للنظام يساوي صفر

بعد الكتلة $\left(A\right)$ عن محور الدوران تساوي: $\left(x_{CM}-x_A\right)$

بعد الكتلة $\left(B\right)$ عن محور الدوران تساوي: $\left(x_B-x_{CM}\right)$

إذا ...

$$\sum \tau = 0$$

$$F_A x_1 \sin(\theta) - F_B x_2 \sin(\theta) = 0$$

$$m_A g\left(x_{CM}-x_A\right) - m_B g\left(x_B-x_{CM}\right) = 0$$

$$m_A\left(x_{CM}-x_A\right) = m_B\left(x_B-x_{CM}\right)$$

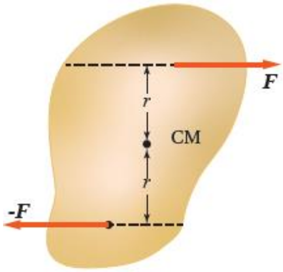
$$m_A x_{CM} - m_A x_A = m_B x_B - m_B x_{CM}$$

$$x_{CM}\left(m_A+m_B\right) = m_A x_A + m_B x_B$$

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

مسائل إضافية

1- الشكل المجاور يبيّن قوتين متساويتين مقدارًا ومتعاكستين اتجاهًا تؤثّران على بُعدٍ متساوٍ من مركز كتلة جسمٍ موجودٍ على سطحٍ أملس. أيُّ الجمل الآتية تصفُ بشكلٍ صحيحٍ حالة الجسم الحركيّة عند اللحظة المُبيّنة؟



أ الجسم في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ؛ حيث القوّة المحصّلة المؤثّرة فيه تساوي صفرًا.
ب الجسم ليس في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ، ويبدأ الدوران بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة
ج الجسم في حالة اتّزانٍ سكونيٍّ، حيث العزم المحصّل المؤثّر فيه يساوي صفرًا
د الجسم ليس في حالة اتّزان سكونيٍّ، ويبدأ الدوران باتّجاه حركة عقارب الساعة.

2- كُسر مَضرب بيسبولٍ منتظم الكثافة في موقع مركز كتلته إلى جزأين؛ كما هو موضّحٌ في الشكل. إنّ الجزء ذا الكتلة الأصغر هو:

أ الجزء الموجود على اليمين.
ب الجزء الموجود على اليسار.
ج كلا الجزأين له الكتلة نفسُها.
د لا يمكن تحديده.

3- جُسيمان نقطيّان البُعد بينهما (r) إذا علمتَ أنّ $(m_1 = 4m_2)$ فإنّ موقع مركز الكتلة يكون

أ في منتصف المسافة بين الجُسيمين
ب بين الجُسيمين، وأقرب إلى (m_1)
ج بين الجُسيمين، وأقرب إلى (m_2)
د خارج الخطّ الواصل بين الجُسيمين، وأقرب إلى (m_1)

الحلول

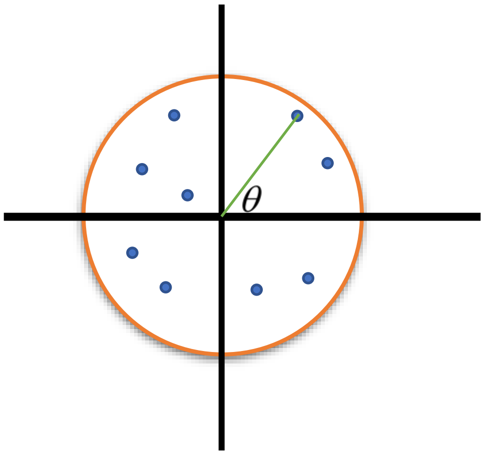
السؤال	١	٢	٣
الجواب	د	ب	ب

الدرس الثاني: ديناميكا الحركة الدورانية

تمهيد ...

لوصف الحركة الدورانية لجسم لا بد من معرفة كميّاتٍ فيزيائيّة عدّة ، منها : الإزاحة الزاويّة، السرعة الزاويّة، التسارُع الزاويّ، وعزم القصور الذاتي والعلاقات بينها.

1 وصفُ الحركة الدورانيّة



الشكل المجاور يمثل قرص دوار ، عندما يدور هذا القرص بزاوية ما فإن جميع جسيماته تدور معه بنفس الزاوية ويمكن وصف موقع كل من هذه الجسيمات باستخدام مفهوم الموقع الزاوي

الموقع الزاوي: هو الزاوية (θ) التي يصنعها الخط الواصل بين الجسيم ونقطة الأصل مع الخط المرجعي (محور $(x+)$

ولوصف حركة جسيم يتحرك حركة دورانية لا بد أن نستخدم الكميات الفيزيائية المبينة في الجدول التالي

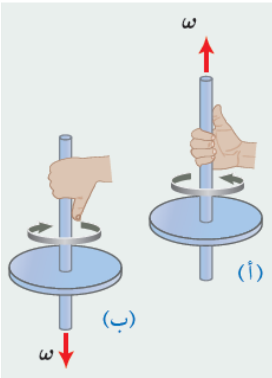
الازاحة الزاوية $(\Delta\theta)$	التعريف	هي التغيُّر في الموقع الزاويّ، وتساوي الزاوية التي يمسحُها نصف قطر المسار الدائريّ الذي يدورُ مع الجسم
	القانون	$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$
	معنى الإشارة	تكون الإزاحة الزاويّة موجبةً عند الدوران بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة. وتكون سالبةً عند الدوران باتّجاه حركة عقارب الساعة.
	وحدة القياس	(rad)
السرعة الزاوية المتوسطة $\bar{\omega}$	التعريف	هي النسبة بين الإزاحة الزاوية $(\Delta\theta)$ لجسم إلى الفترة الزمنية (Δt) التي حدثت فيها تلك الازاحة
	القانون	$\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$
	معنى الإشارة	السرعة الزاوية الموجبة تدل على أن الجسم يتحرك عكس عقارب الساعة السرعة الزاوية السالبة تدل على أن الجسم يتحرك مع عقارب الساعة
	وحدة القياس	(rad/s)
	الاتجاه	باستخدام قاعدة قبضة اليد اليمنى (انظر في الصفحة التالية)
التسارع الزاوي المتوسط $(\bar{\alpha})$	التعريف	هو نسبةُ التغيّر في مقدار السرعة الزاويّة إلى الزمن اللازم لحدوث هذا التغيّر
	القانون	$\bar{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$
	معنى الإشارة:	إذا كانت إشارة التسارع والسرعة متماثلتان (موجبتان أو سالبتان) فالجسم يتسارع إذا كانت إشارة التسارع والسرعة مختلفتان (أحدهما موجب والأخر سالب) فالجسم تباطأ
	وحدة القياس	(rad/s^2)

ملاحظات هامة....

1. السرعةَ الزاويّة اللحظيّة (ω) : هو السرعةُ الزاويّة لجسمٍ عندَ لحظةٍ زمنيّةٍ معينة
2. إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة فإن السرعة الزوية المتوسطة تساوي السرعة الزاوية اللحظية
3. التسارعُ الزاويّ اللحظيّ (α) :هو التسارعُ الزاويّ لجسمٍ عند لحظةٍ زمنيّةٍ مُعيّنة
4. إذا كان التسارع الزاوي ثابت فإن تسارُعه الزاويّ المتوسط يُساوي تسارُعه الزاويّ اللحظيّ
5. إذا لم يحدد نوع التسارع والسرعة نفترض أنه لحظي
6. عندما يدور جسم حول محور ثابت فإن كل جسيم فيه يقطع نفس الإزاحة الزاوية وله نفس السرعة الزاوية و التسارع الزاوي

تحديد اتجاه السرعة الزاوية

يحدد اتجاه السرعة الزاوية بالاعتماد على قاعدة قبضة اليد اليمنى وذلك عن طريق لفّ أصابع اليد اليمنى حول محور دورانه بحيث تُشير إلى اتّجاه دوران الجسم، فيُشير الإبهام إلى اتّجاه السرعة الزاويّة كما في الشكل المجاور



مراجعة للمحاور الرئيسية

الشكل المجاور يبين المحاور الرئيسية التي نعتمد عليها في تحديد الاتجاهات، ونرمز للاتجاهات الرئيسية اعتمادا على الشكل كما يلي:

اليمين = الشرق = $(x+)$

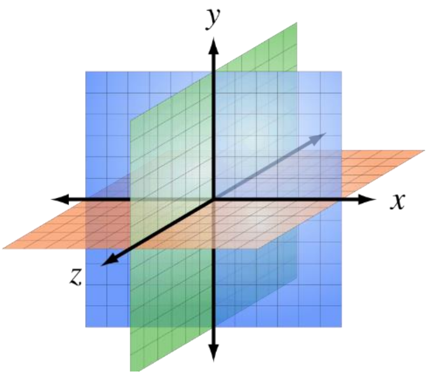
اليسار = الغرب = $(x-)$

الأعلى = الشمال = $(y+)$

الأسفل = الجنوب = $(y-)$

خارج من الصفحة = نحو الناظر = $\odot$ = $(z+)$

داخل إلى الصفحة = مبتعد عن الناظر = $\otimes$ = $(z-)$



ونلاحظ من الشكل عند استخدام قاعدة قبضة اليد اليمنى لتحديد اتجاه السرعة ما يلي:

إذا كان الجسم يدور على المستوى $(x\ ,\ y)$ فإن اتجاه السرعة يكون على المحور (z)

إذا كان الجسم يدور على المستوى $(x\ ,\ z)$ فإن اتجاه السرعة يكون على المحور (y)

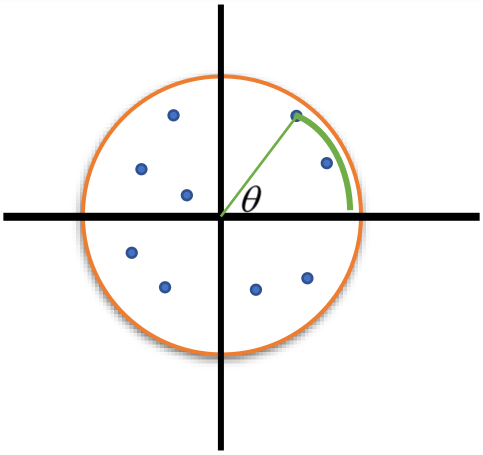
إذا كان الجسم يدور على المستوى $(z\ ,\ y)$ فإن اتجاه السرعة يكون على المحور (x)

أي ان اتجاه السرعة يكون دائما عمودي على مستوى دوران الجسم وموازيا لمحور الدوران

الربط مع الفلك

كوكبُ الأرض جسم يتحرّك حركةً دورانيّة، ويكون لأجزائه جميعها الإزاحة الزاويّة نفسها، وبالتالي السرعة الزاويّة نفسها، في حين يقطع كلُّ جزءٍ منها مسافاتٍ مختلفةً في كلّ دورةٍ نتيجة اختلاف بُعد كلٍّ منها عن محور الدوران.

إيجاد المسافة التي يقطعها الجسيمات الواقعة على جسم يتحرك حركة دورانية

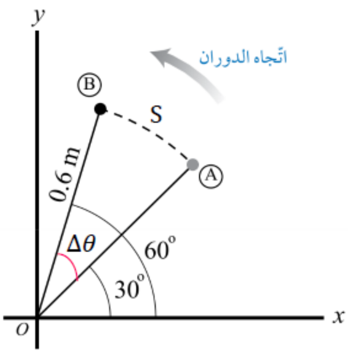


عند دوران جسم حول محور ما كما في الشكل المجاور فإن كل جسيم يقع عليه يقطع مسافة مختلفة عن الجسم الاخر وذلك يعتمد على بعده عن نقطة دوران الجسم حيث أن المسافة التي يقطعها الجسم تمثل طول القوس الذي يرسمه نتيجة لحركته الدورانية ويمكن إيجاد مقدار طول ذلك القوس (المسافة المقطوعة) بالقانون التالي:

$$s = r\theta$$

حيث θ تقاس بوحدة rad

مثال (1)



يبين الشكل المجاور جسيم يقع على جسم يدور بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة معتمدا على البيانات المثبتة على الشكل جد

1. الموقع الزاوية للجسم عند النقطة (A)
2. الموقع الزاوية للجسم عند النقطة (B)
3. الإزاحة الزاوية للجسم
4. المسافة التي قطعها الجسم عند تحركه من النقطة (A) إلى النقطة (B)

الحل

1. $\theta_A = \dfrac{\pi}{6} rad$

2. $\theta_B = \dfrac{\pi}{3} rad$

3. $$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} rad$$

4. $s = \Delta\theta r = \dfrac{\pi}{6} \times 0.6 = 0.1\pi\, rad$

مثال (2)

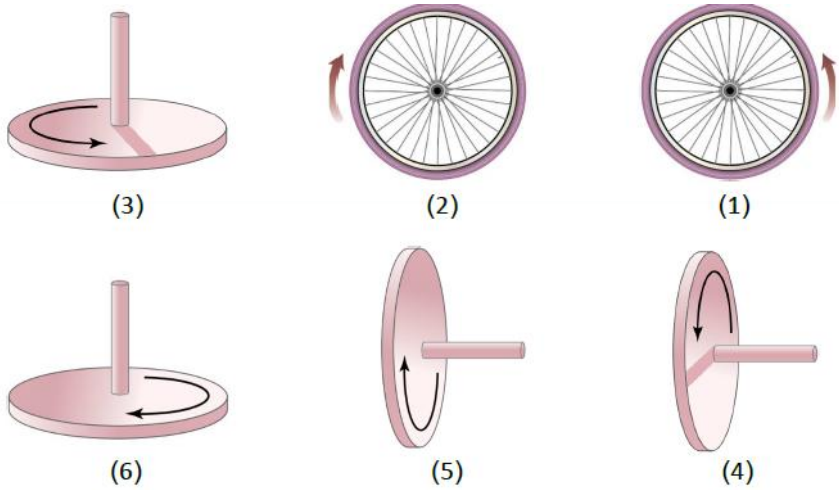
يدور إطار بحيث تتحرك نقطة عند حافته الخارجية مسافة مقدارها $(1.5m)$ إذا كان نصف قطر الاطار $(2.5m)$ كما في الشكل المجاور فما مقدار الزاوية التي دارها العجل

الحل

$$S = \theta r \Rightarrow 1.5 = \theta \times 2.5 \Rightarrow \theta = 0.6 rad$$

مثال (3)

حدد اتجاه السرعة الزاوية في كل شكل من الأشكال الآتية.



الحل

1) $z+$ 2) $z-$ 3) $y+$ 4) $x+$ 5) $x-$ 6) $y-$

مثال (4)

يتسارع الجزء الدوّار في جهاز فصل مكوّنات الدمّ من السكون إلى $(3\times10^3 rad/s)$ خلال $(30s)$ بتسارعٍ زاويٍّ ثابت. أحسب مقدار ما يأتي:

1 التسارعُ الزاويّ المتوسط. 2 السرعة الزاويّة بعد مرور $(20s)$ من بدء دورانه

الحل

المعطيات: $\Delta t=30s$ $\omega_f=3\times10^3 rad/s$ $\omega_i=0$

1

$$\bar{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_f-\omega_i}{t_f-t_i}=\frac{3\times10^3-0}{30}=100rad/s^2$$

2

$$\bar{\alpha}=\frac{\omega_f-\omega_i}{\Delta t}$$

$$100=\frac{\omega_f-0}{20}\Rightarrow\omega_f=2000rad/s$$

مثال (5)

يدور إطارُ سيارةٍ بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة؛ بسرعةٍ زاويّة ثابتةٍ مقدارُها $(2rad/s)$ مدة زمنيّة مقدارُها $(20s)$ ثمّ يتسارع بعد ذلك بتسارع زاويٍّ ثابت مقدارُه $(3.5rad/s^2)$ مدة زمنيّة مقدارُها $(10s)$ أحسبُ مقدار ما يأتي:

1 الإزاحة الزاويّة للإطار عند نهاية الفترة الزمنيّة لحركته بسرعة زاويّة ثابتة.

2 السرعة الزاويّة للإطار عند نهاية الفترة الزمنيّة لحركته بتسارُع زاويٍّ ثابت.

الحل

المعطيات: $\Delta t_2 = 10s \quad \Delta t_1 = 20s \quad \alpha = 3.5 rad/s^2 \quad \omega_i = 2 rad/s$

1

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$2 = \frac{\Delta\theta}{20} \Rightarrow \Delta\theta = 40 rad$$

2

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

$$3.5 = \frac{\omega_f - 2}{10} \Rightarrow \omega_f = 37\ rad/s$$

مثال (6)

تدور إطارات سيارة بسرعة زاويّة ثابتة تساوي $(5 rad/s)$ أجيبُ عمّا يأتي:

1. هل التسارع الزاويّ للإطارات موجبٌ أم سالبٌ أم صفر؟ أفسّر إجابتي
2. هل تدور أجزاء الإطار جميعها بمقدار السرعة الزاويّة نفسه أم لا؟ أفسّر إجابتي.

الحل

المعطيات: $\omega = 5 rad/s$

1. بما أن السرعة الزاوية ثابتة إذا التسارع الزاوي يساوي صفر
2. بما أن شكل الإطار ثابت فإن جميع اجزائه تدور بمقدار السرعة الزاوية نفسها

مثال (7)

السرعة الزاوية لجسم عند لحظة زمنية معيّنة تساوي $(-3 rad/s)$ ، وتسارعه الزاوي عند اللحظة نفسها $(2 rad/s^2)$

أجيب عمّا يأتي:

1. هل يدور الجسم باتّجاه حركة عقارب الساعة أم بعكسه؟ أفسّر إجابتي.
2. هل يتزايد مقدار سرعته الزاويّة أم يتناقص أم يبقى ثابت؟ أفسّر إجابتي

الحل

المعطيات: $\alpha = 2 rad/s^2 \quad \omega = -3 rad/s$

1. بما أن السرعة الزاوية سالبة فالجسم يدور باتجاه حركة عقارب الساعة
2. بما أن إشارة السرعة و التسارع مختلفتان الجسم تباطأ

مثال (8)

يدور إطار درّاجة بسرعة زاويّة ثابتة حول محورٍ ثابت. كيف يتغيّر مقدار السرعة الزاويّة لأجزاء الإطار بالانتقال من داخله إلى حافته الخارجية؟

الحل

لجميع أجزاء الإطار السرعة الزاوية نفسها .

مثال (9)

مثقبٌ كهربائيٌّ يدورُ جزؤه الدوّار من السكون بتسارعٍ زاويٍّ ثابت، ويُصبح مقدار سرعته الزاويّة $\left(2.6\times10^3 rad/s\right)$ بعد $\left(4s\right)$ من بدء دورانه. أحسبُ مقدار التسارُعِ الزاويّ للجزء الدوّار من المثقّب

الحل

المعطيات: $\Delta t=4s$ $\quad \omega_f=2.6\times10^3 rad/s$ $\quad \omega_i=0$

$$\bar{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_f-\omega_i}{t_f-t_i}=\frac{2.6\times10^3-0}{4}=650 rad/s^2$$

مثال (10)

تدور عربةُ دولابٍ هوائيٍّ في مدينة الألعاب بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة ، فتمسح إزاحةً زاويّةً مقدارُها $\left(1.5rad\right)$ خلال $\left(3s\right)$ أحسبُ مقدار السرعة الزاويّة المتوسّطة للعربة

الحل

المعطيات: $\Delta t=3s$ $\quad \Delta\theta=1.5rad$

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}rad/s$$

مثال (11)

ذهبت عرين وفرح إلى مدينة الألعاب في عيد الفطر، وركبتا لعبة الحصان الدوّار؛ حيث جلست عرين على حصانٍ قرب الحافّة الخارجية للصفيحة الدائرية المُتحرّكة للعبة؛ بينما جلست فرح على حصانٍ في منتصف المسافة بين عرين ومحور الدوران الثابت. عند دوران اللعبة بسرعةٍ زاويّة ثابتة؛ أيُّ الفتاتَين: عرين أم فرح مقدار سرعتها الزاويّة أكبر؟

الحل

مقدار السرعة الزاوية لهما متساوية لانهما يقطعان الزاوية نفسها خلال الفترة الزمنية نفسها

مثال (12)

ما هي السرعة الزاوية لكل من

١) عقرب الثواني في الساعة ٢) عقرب الدقائق في الساعة

الحل

عقرب الثواني يقطع إزاحة زاوية مقدارها $\Delta\theta=2\pi$ خلال زمن قدره $60s$

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}\ rad/s$$

٢)

عقرب الدقائق يقطع إزاحة زاوية مقدارها $\Delta\theta=2\pi$ خلال زمن قدره $3600s$

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{2\pi}{3600}=\frac{\pi}{1800}\ rad/s$$

مسائل إضافية

1- جسمان متماثلان A و B على سطح الأرض؛ الجسمُ A عند خط الاستواء، والجسم B عند قطبها الشمالي. أيٌّ مّما يأتي يُعبِّر بشكلٍ صحيحٍ عن العلاقة بين سرعتي الجسمين الزاويّة؟

أ $\omega_A > \omega_B \neq 0$ ب $\omega_A > \omega_B$ ج $\omega_A < \omega_B$ د $\omega_A > \omega_B = 0$

2- عند دوران إطار سيارةٍ حولَ محورٍ ثابتٍ؛ فإنّ مقدار سرعته الزاويّة

أ يكون متساويًا لأجزائه جميعها.

ب يزداد بالابتعاد عن محور الدوران

ج يقلُّ بالابتعاد عن محور الدوران.

د يساوي صفرًا.

3- عند دوران أسطوانةٍ مُصمَتةٍ متماثلةٍ حول محورٍ ثابتٍ مدّةً زمنيّةً معيّنةً فإنّ مقدار الإزاحة الزاويّة:

أ يكون متساويًا لأجزائه جميعها.

ب لا يعتمد على زمن دوران الجسم؛ فهو يساوي ($2\pi\ rad$) دائمًا

ج يكون أكبرَ للجُسيمات القريبة من محور الدوران

د يكون أكبرَ للجُسيمات البعيدة من محور الدوران

4- الزاويةُ التي يصنعها الخطُّ الواصل بين الجسم ونقطة الأصل مع الخط المرجعيّ (محور $(x+)$) تُسمّى

أ الإزاحةُ الزاويّة ب الموقعُ الزاويّ ج السرعةُ الزاويّة د الزاويةُ الحرجة

السرعة الزاويّة لجسمٍ يتحرّك حركةً دورانيّةً عند لحظة معيّنة تُساوي $(-5rad/s)$ وتَسارعُه الزاويّ عند اللحظة نفسها $(3rad/s^2)$ أصِفُ حركةَ هذا الجسم بأنّه:

أ يدورُ باتّجاه حركة عقارب الساعة بتسارع

ب يدور باتّجاه حركة عقارب الساعة بتباطؤ.

ج يدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة بتسارع.

د يدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة بتباطؤ.

يدور إطار سيّارةٍ بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة حول محور دورانٍ ثابتٍ عموديٍّ عليه ويمرُّ في مركزه. أيُّ الجمل الآتية صحيحةٌ في ما يتعلّقُ بحركة الإطار:

أ تزدادُ السرعة الزاويّة لأجزاء الإطار بالاقتراب من محور الدوران.

ب تزداد السرعة الزاويّة لأجزاء الإطار بالابتعاد عن محور الدوران.

ج يكون لأجزاء الإطار جميعها السرعةُ الزاويّة نفسُها.

د السرعة الزاويّة لبعض أجزاء الإطار موجبة، ولأجزاء أخرى سالبة حسب بعدها عن محور الدوران.

2 عزم القُصور الذاتيّ والقانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية

عندما يتحرك جسم حركة دورانية فإن تسارعه الزاوي يتناسب طرديا مع مقدار العزم المؤثر عليه ويمكن صياغة علاقة بين التسارع الزاوي والعزم على النحو التالي:

$$\boxed{\sum \tau = I \times \alpha}$$

حيث أن : $\sum \tau$ هو العزم المحصل المؤثر على الجسم

α هو التسارع الزاوي الذي يكتسبه الجسم

I هو عزم القصور الذاتي للجسم

ما هو عزم القصور الذاتي؟؟

نلاحظ من القانون السابق وجود تشابه بين هذا القانون وقانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقالية $\sum F = ma$ حيث إن العزم المحصل $\sum \tau$ يقابل القوة المحصلة في قانون نيوتن الثاني. والتسارع الزاوي α يقابل التسارع الخطي في قانون نيوتن الثاني وعزم القصور الذاتي I يقابل كتلة الجسم في قانون نيوتن الثاني.

السؤال 1 وضح ما المقصود بكل من كتلة الجسم وعزم القصور الثاني

الجواب:

الكتلة : هي مقياس لُمانعة الجسم للتغيّر في حركته الانتقاليّة

عزم القصور الذاتي: مقياسًا لمانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الدورانيّة.

ملاحظة : كلما زاد مقدار عزم القصور الذاتي للجسم زاد مقدار العزم الازم لتحريك الجسم

إيجاد عزم القصور الذاتي لجسيم نقطي؟؟

عند دوران جسيم نقطي كتلته (m) حول محور دوران يبعد عنه مسافة عمودية مقدارها (r) فإن هذا الجسيم يمتلك عزم قصور ذاتي يعطى بالعلاقة

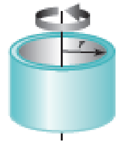
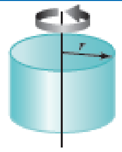
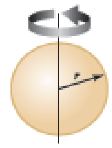
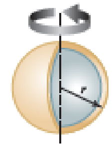
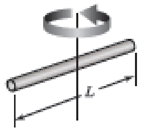
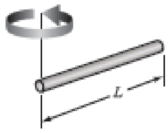
$$\boxed{I = mr^2}$$

ولحساب عزم القصور الذاتي لنظام فيزيائي يتكون من عدة اجسام نقطية تدور حول محور دوران مشترك فإننا نجد عزم القصور الذاتي لكل جسم على حد ثم نجمعها معاً

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

إيجاد عزم القصور الذاتي لجسم ثلاثي الابعاد (3D)؟؟

إذا كان الجسم المطلوب حساب عزم القصور الذاتي لها جسم ثلاثي الابعاد (مجسم) يدور حول محور دوران فإننا نستعين بالجدول التالي:

الجسم	موضع محور الدوران	الشكل	عزم القصور الذاتي
حلقةٌ رقيقةٌ أو أسطوانةٌ مجوّفة.	يمرّ بالمركز عموديًّا على مستواها.		$I = mr^2$
أسطوانةٌ مُصمَتة منتظمةٌ أو قرصٌ دائري.	يمرُّ بالمركز عموديًّا على مستواها.		$I = \frac{1}{2} mr^2$
كرةٌ مُصمَتة منتظمة.	يمرُّ بالمركز.		$I = \frac{2}{5} mr^2$
كرةٌ مجوّفة.	يمرُّ بالمركز.		$I = \frac{2}{3} mr^2$
قضيبٌ منتظم.	عموديٌّ على القضيب ويمرُّ بمنتصفه.		$I = \frac{1}{12} mL^2$
قضيبٌ منتظم.	عموديٌّ على القضيب ويمرُّ بطرفه.		$I = \frac{1}{3} mL^2$

ملاحظات هامة....

- وحدة قياس عزم القصور الذاتي هي $(kg.m^2)$ حسب النظام الدولي للوحدات
- يعتمد عزم القصور الذاتي على:
  1. كيفية توزيع كتلته حول محور دورانه
  2. موقع محور الدوران
- استنتاجات هامة
  1. كلما زاد قطر الجسم زاد عزم القصور الذاتي له
  2. كلما توزّعت كتلة الجسم بعيدًا عن محور دورانه؛ فإنّ عزم القصور الذاتي له يكون أكبر (الجسم المجوف عزم القصور الذاتي لها أكبر من الجسم المصمت)
  3. كلما ابتعد محور الدوران عن مركز الجسم الهندسي زاد مقدار عزم القصور الذاتي له.

مثال (1)

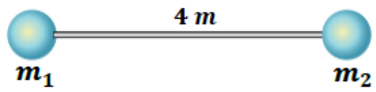
كرة صغيرة كتلتها $50g$ مثبتة في نهاية قضيب مهمل الكتلة طوله $(20cm)$ وتدور الكرة حول محور كما هو موضح في الشكل المجاور إذا علمت على نصف قطر الكرة مهمل مقارنة بطول القضية بحيث يمكن اعتبارها جسيم نقطي فاحسب عزم القصور الذاتي للكرة

الحل

$$I = mr^2 = 0.05\times(0.2)^2 = 0.002\,kg.m^2$$

مثال (2)

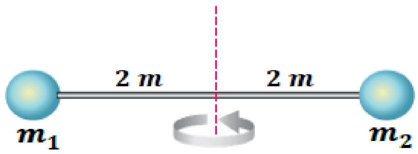
نظام يتكون من كرتين صغيرتين مثبتتين في نهايتي قضيب مهمل الكتلة طوله $(4m)$ كتلة الكرة الأولى $(m_1 = 5kg)$ وكتلة الكرة الثانية $(m_2 = 7kg)$ وأنصاف أقطار الكرات مهملة مقارنة بطول القضيب بحيث يمكن اعتبارها جسيمات نقطية أحسب مقدار ما يأتي



1. عزم القصور الذاتي عندما يدور النظام حول محور يمر في منتصف المسافة بين الكرتين
2. عزم القصور الذاتي عندما يدور النظام حول محور يمر بمركز الكرة الثانية
3. عزم القصور الذاتي عندما يدور النظام حول محور على بعد $0.5m$ إلى يسار الكرة الأولى

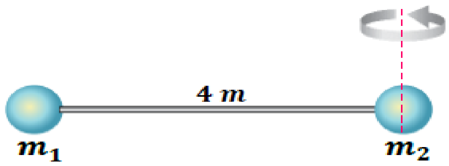
الحل

1)



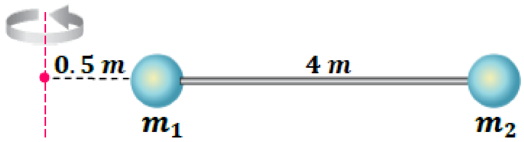
$$I = I_1 + I_2$$
$$= m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$
$$= (5\times2^2) + (7\times2^2) = 48kg.m^2$$

2)



$$I = I_1 + I_2$$
$$= m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$
$$= (5\times4^2) + (7\times0^2) = 80kg.m^2$$

3)



$$I = I_1 + I_2$$
$$= m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$
$$= (5\times0.5^2) + (7\times4.5^2) = 143kg.m^2$$

مثال (3)

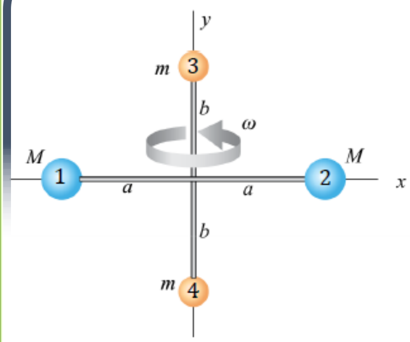
احسب عزم القصور الذاتي لأربع كتل متماثلة كتلة كل منها $3kg$ موزعة على رؤوس مستطيل طوله $(30cm)$ وعرضه $(40cm)$ بالنسبة لمحور عمودي على سطح المستطيل و يمر في مركز المستطيل

بعد كل كتلة عن المحور تساوي $25cm$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$
$$I = mr^2 + mr^2 + mr^2 + mr^2$$
$$I = 4mr^2$$
$$I = 4 \times 3 \times 0.25^2$$
$$I = 0.75kg.m^2$$

مثال (4)

نظام يتكون من أربع كرات صغيرة مثبتة في نهايات قضيبين مهملي الكتلة ويدور النظام حول محور (y) كما في الشكل المجاور إذا علمت أن $(m = 50g),(M = 100g)$, و أنصاف أقطار الكرات مهملة مقارنة بطولي القضيبين بحيث يمكن $(a = b = 50cm)$ اعتبارها جسيمات نقطية احسب عزم القصور الذاتي للنظام



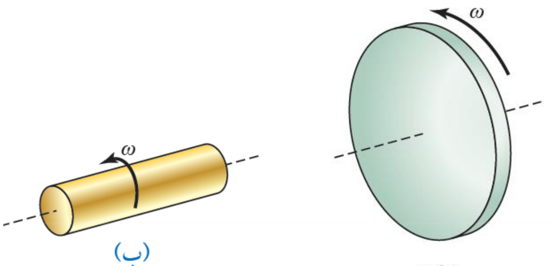
الحل

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$
$$I = mr^2 + mr^2 + Ma^2 + Ma^2$$
$$I = 2mr^2 + 2Ma^2$$
$$I = 2(0.05)(0^2) + 2(0.1)(0.5^2)$$
$$I = 0.05kg.m^2$$

عزم القصور الذاتي للكرتين الصغيرتين يساوي صفر لانهما تقعان على محور الدوران

مثال (5)

في الشكل المجاور جسمان لهما نفس مقدار الكتلة اعتمادا على الشكل أي الجسمين يصعب تحركيه بشكل دوراني ولماذا؟

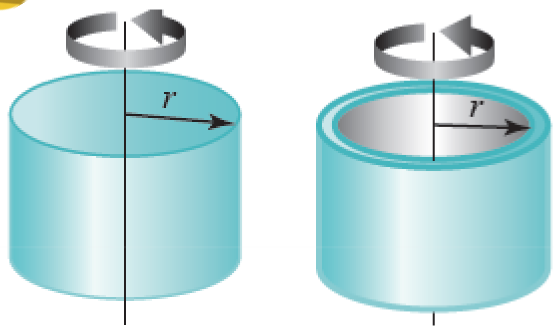


الحل

الجسم (أ) أصعب لإن له عزم قصور ذاتي أكبر من الجسم (ب) وذلك لإن قطر الجسم (أ) أكبر من قطر الجسم (ب)

مثال (6)

في الشكل المجاور جسمان اسطوانياً لهما نفس مقدار الكتلة احدهما مفرغ والأخر مصمت اعتمادا على الشكل أي الجسمين يصعب تحركيه بشكل دوراني ولماذا؟



الحل

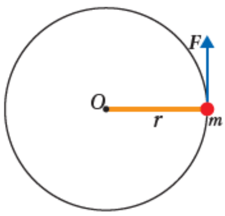
الأسطوانة المفرغة أصعب لإن عزم قصورها الذاتي أكبر وذلك لإن كتلتها تتوزع بعيدا عن محور الدوران.

انتبه....

عن مقارنة عزم القصور الذاتي لجسمين متماثلين لهما نفس الكتلة ويدوران حول نفس محور الدوران فإن الجسم المفرغ (المجوف) دائما له عزم قصور ذاتي أكبر من الجسم المصمت.

مثال (7)

كرة كتلتها $(3kg)$ مثبتة في نهاية قضيب فلزي خفيف طوله $(0.5m)$ وتتحرك حركة دورانية حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة يمر في النهاية الأخرى للقضيب بتأثير قوة مماسية (F) ثابتة في المقدار، كما في الشكل المجاور اذا بدأت الكرة حركتها من السكون بتسارع زاوي ثابت بحيث أصبح مقدار سرعتها الزاوية $(40 rad/s)$ خلال $(5s)$ فأحسب مقدار ما يأتي بإهمال كتلة القضيب الفلزي:



1. التسارُع الزاويّ للكرة
2. العزم المُحصّل المؤثّر في الكرة
3. القوة المماسية (F) المؤثرة في الكرة

الحل

المعطيات: $\Delta t = 5s$ $\quad \omega_f = 40 rad/s$ $\quad \omega_i = 0$ $\quad r = 0.5m$ $\quad m = 3kg$

1

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{40-0}{5} = 8 rad/s^2$$

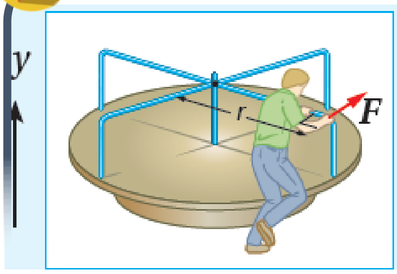
2

$$I = mr^2 = (3)(0.5)^2 = 0.75\ kg.m^2$$
$$\sum \tau = I\alpha = (0.75)(8) = 6\ N.m$$

3

$$\sum \tau = F\,r\sin\theta$$
$$6 = F(0.5)(1)$$
$$F = 12N$$

مثال (8)



لعبة القرص الدوّار الموضحة في الشكل المجاور تتكون من قرص مصمت قابل للدوران حول محور ثابت يمر في مركزه باتجاه محور (y) . أثر شخص بقوة مماسية (F) ثابتة في المقدار عند حافة القرص مقدارها $(250N)$ إذا علمت أن كتلة القرص الدوّار $(50kg)$ ونصف قطره $(2m)$ ، وبإهمال قوى الاحتكاك واعتبار قرص اللعبة منتظم ، واللعبة بدأت الدوران من السكون بتسارع زاوي ثابت بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة. فأحسب مقدار ما يأتي:

1 العزمُ المحصّل المؤثر في اللعبة
2 التسارعُ الزاويّ للّعبة
3 التسارعُ الزاويّ للّعبة عندما يجلس طفلٌ كتلتُه $(20kg)$ على بعد $(1.5m)$ من محور الدوران، بافتراض الطفل جُسيم نُقطيّ.

الحل

المعطيات: $\omega_i = 0$ $r = 2m$ $m = 50kg$ $F = 250N$

1

لإن اللعبة تدور عكس عقارب الساعة فالعزم موجب

$$\sum \tau = F\,r\sin\theta$$
$$\sum \tau = (250)(2)(1) = 500\ N.m$$

2

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{500}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{500}{\frac{1}{2}(50)(2^2)} = 5\,rad/s^2$$

ملاحظة : قانون عزم القصور الذاتي للقرص يساوي $I = \frac{1}{2}mr^2$ ويعطى في الامتحان

3

يتغير عزم القصور الذاتي للنظام ويصبح:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$I = \frac{1}{2}(50)(2^2) + (20)(1.5^2) = 100 + 45 = 145N.m^2$$

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{500}{145} \simeq 3.4rad/s^2$$

مثال (9)

فسر لماذا يعتمد عزم القصور الذاتيّ لجسمٍ على موقع محور دورانه.

الحل

كلّما كانت كتلة الجسم أو الجزء الأكبر من كتلته أقرب إلى محور دورانه كان عزم قصوره الذاتيّ أقل.

مثال (10)

أقارن بين كتلة جسم وعزم القصور الذاتيّ له.

الحل

الكتلة: تقيس ممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الانتقالية، وهي ثابتة لا تتغير .

عزم القصور الذاتيّ: يقيس ممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الدورانية، وهو يتغير بتغير محور الدوران

مثال (11)

قضيب فلزي خفيف رفيع طوله (L) مُثبّت عند طرفيه كرتين متماثلتين مهملتيّ الأبعاد، كتلة كل منهما (m) كما هو موضح في الشكل. في الحالة الأولى، دُوّر النظام المكوّن من القضيب الفلزي والكرتين حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة يمر بمنتصف القضيب الفلزي. وفي الحالة الثانية، دُوّر النظام حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة يمر بأحد طرفي القضيب الفلزي. بإهمال كتلة القضيب الفلزي مقارنة بكتلتي الكرتين، في أي الحالتين السابقتين يلزمني عزم محصّل أكبر لبدء تدوير النظام؟ أفسّر جابتي.

الحل

الحالة الأولى : محور الدوران في المنتصف بين الكرتين

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = mr_2^2 + mr_2^2 = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2}$$

الحالة الثانية : محور الدوران يمر خلال إحدى الكرتين

$$I = I_1 + I_2$$

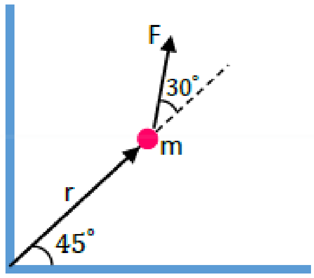
$$I = mr_2^2 + mr_2^2 = m(L)^2 + m(0)^2 = mL^2$$

في الحالة الثانية يلزمني عزم أكبر لان عزم القصور الذاتيّ لها أكبر من الحالة الأولى

مثال (12)

يتحرك جسيم نقطي كتلته $(2kg)$ في المستوى الأفقي بحيث يعطى موضعه والقوة المؤثرة عليه في لحظة معينة بالمتجهين الموضحين في الشكل المجاور حيث $r = 2m$ و $F = 4N$
احسب كلاً مما يأتي:

1. العزم المؤثر على الجسيم
2. التسارع الزاوي الذي يكتسبه الجسيم



الحل

1)

$$\tau = rF\sin\theta = 2\times 4\times \sin 30 = 4N.m$$

$$\tau = I\alpha$$

$$\Rightarrow I\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\tau}{mr^2} = \frac{4}{2\times 2^2} = 0.5rad/s^2$$

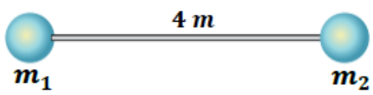
مسائل إضافية

وحدة قياس عزم القصور الذاتي حسب النظام الدولي للوحدات هي

أ $N.m/s$ ب $Kg.m^2$ ج $kg.m^2/s$ د $kg.m/s$

سؤال

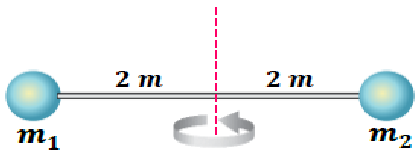
نظام يتكون من كرتين صغيرتين مثبتتين في نهايتي قضيب كتلته $(12kg)$ طوله $(4m)$ كتلة الكرة الأولى $(m_1 = 5kg)$ وكتلة الكرة الثانية $(m_2 = 7kg)$ وأنصاف أقطار الكرات مهملة مقارنة بطول القضيب بحيث يمكن اعتبارها جسيمات نقطية أحسب مقدار ما يأتي



1. عزم القصور الذاتي عندما يدور النظام حول محور يمر في منتصف المسافة بين الكرتين
2. عزم القصور الذاتي عندما يدور النظام حول محور يمر بمركز الكرة الثانية

الحل

1)



$$I = I_1 + I_2 + I_{Line}$$

$$= m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

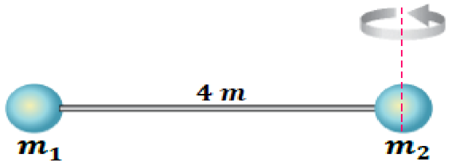
$$= (5\times 2^2) + (7\times 2^2) + \left(\frac{1}{12}\times 12\times 4^2\right) = 64kg.m^2$$

2)

$$I = I_1 + I_2 + I_{Line}$$

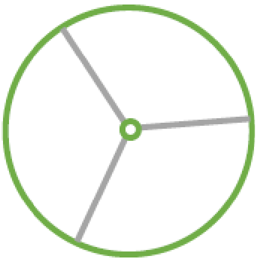
$$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \frac{1}{3} m L^2$$

$$= (5\times 4^2) + (7\times 0^2) + \left(\frac{1}{3}\times 12\times 4^2\right) = 144 kg.m^2$$



سـؤال

يمثل الشكل المجاور نظاما يتكون من حلقة معدنية كتلتها (m) يصلها بمركزها ثلاث أسلاك من نفس نوع المعدن، كتلة السلك الواحد (m) وطوله (L) جد عزم القصور الذاتي للنظام . علما بأن عزم القصور الذاتي للحلقة يساوي (mr^2) وعزم القصور الذاتي للسلك عندما يمر محور الدوران بمنتصفه يساوي $\left(\frac{1}{12}mL^2\right)$ وعزم القصور الذاتي للسلك عندما يمر محور الدوران بطرفه يساوي $\left(\frac{1}{3}mL^2\right)$



الحل

$$I = I_{circle} + 3I_{Line}$$

$$I = mL^2 + 3\left(\frac{1}{3}mL^2\right)$$

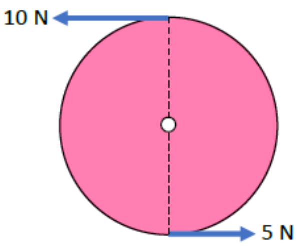
$$I = 2mL^2$$

سـؤال

أسطوانة قطرها $(2m)$ وعزم قصورها الذاتي حول محور دورانها $(0.3 kg.m^2)$ أثرت عليها القوى $(5N)$, $(10N)$ كما في الشكل المجاور فبدأت الدوران من السكون جد :

1 التسارع الزاوي للأسطوانة

2 السرعة الزاوية للأسطوانة بعد $(5s)$ من بدأ حركتها



الحل

1

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{I}$$

$$= \frac{r F \sin\theta + r F \sin\theta}{I}$$

$$= \frac{(10\times 1\times \sin 90) + (5\times 1\times \sin 90)}{0.3} = 50 rad / s^2$$

2

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t}$$

$$50 = \frac{\omega_f - 0}{5} \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \omega_f = 250 rad / s$$

ســـــــــــــؤال

جد التسارع الزاوي لقرص نصف قطره $(4cm)$ وعزم قصوره الذاتي $(0.4kg.m^2)$ أثرت عليه قوة مماسيه مقدارها $(50N)$

الحل

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{r\,F\sin\theta}{I}$$

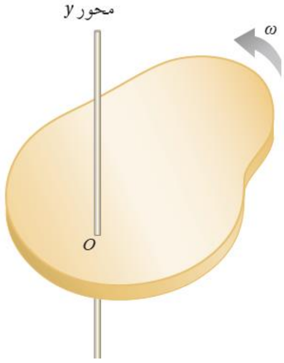
$$= \frac{0.04 \times 50 \times \sin 90}{0.4}$$

$$= 5 rad / s^2$$

الدرس الثالث: الزخم الزاوي

1 الطاقة الحركية الدورانية

عندما يتحرك جسم حركة انتقالية من مكان إلى أخر فإنه يمتلك طاقة حركية خطية، وكذلك الأمر إذا تحرك جسم حركة دورانية حول محور دوران ثابت فإنه يمتلك طاقة حركية دورانية تعطى بالقانون التالي



$$\boxed{KE_R = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

حيث أن... I تمثل عزم القصور الذاتي للجسم.

ω تمثل السرعة الزاوية للجسم

ملاحظات هامة....

1. وحدة قياس الطاقة الحركية الدورانية مثل باقي أشكال الطاقة وهي الجول (J) وتساوي أيضا $kg.m^2.rad^2/s^2$
2. يوجد تشابه بين قانون الطاقة الحركية الدورانية والخطية حيث أن $(I\ ,\ \omega)$ في الحركة الدورانية تقابل $(m\ ,\ v)$ في الحركة الخطية على الترتيب

السؤال 1 علام ماذا تعتمد الطاقة الحركية الدورانية.

الجواب: 1 عزم القصور الذاتي للجسم 2 مقدار السرعة الزاوية للجسم

السؤال 2 هل يتغير مقدار الطاقة الحركية الدورانية بتغير موقع محور الدوان بالنسبة للجسم أو بتغير مقدار كتلة الجسم.

الجواب: نعم، وذلك لإن موقع محور الدوران وكتلة الجسم يؤثر كل منهما على مقدار عزم القصور الذاتي.

مثال (1)

يتحرّكُ جزيءُ أكسجينٍ (O_2) حركةً دورانيّةً حول محورٍ ثابتٍ باتّجاه محور (z) عموديٍّ على مُنتصف المسافة بين ذرتيّ الأكسجين المكوّنتين له، بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها $\left(4.5\times10^{12} rad/s\right)$ إذا علمتُ أنّ عزم القصور الذاتيّ لجزيء الأكسجين حول محور دورانه (z) يساوي $\left(1.95\times10^{-46} kg.m^2\right)$ عند درجة حرارة الغرفة؛ فاجب عما يلي:

1. فأحسبُ مقدار الطاقة الحركيّة الدورانيّة للجزيء.
2. إذا تغيّر موقع محور الدوران مع بقاء مقدار السرعة الزاويّة ثابتًا، فهل يتغيرُ مقدار الطاقة الحركيّة الدورانيّة؟

الحل

المعطيات: $I=2\times10^{-46} kg.m^2 \qquad \omega=4.5\times10^{12} rad/s$

1

$$KE_R=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(2\times10^{-46}\right)\left(4.5\times10^{12}\right)^2=20.25\times10^{-22} J$$

2

نعم يتغير مقدار الطاقة الحركية الدورانية، لأنه بتغير موقع محور الدوران يتغير عزم القصور الذاتي للنظام .

مثال (2)

قرصٌ مصمتٌ منتظمٌ متماثلٌ كتلتهُ $(2kg)$ ونصف قطره $(0.5m)$ يتحرّك حركةً دورانيّةً بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها $(8rad/s)$ حول محورٍ ثابتٍ عموديٍّ على مركزه. أحسب الطاقة الحركيّة الدورانيّة للقرص.(علما بأن عزم القصور الذاتي للقرص المصمت يعطى بالعلاقة $\left(I=\frac{1}{2}mr^2\right)$

الحل

المعطيات: $r=0.5m \qquad m=2kg \qquad \omega=8rad/s$

$$I=\frac{1}{2}mr^2=\frac{1}{2}(2)(0.5)^2=\frac{1}{4}kg.m^2$$

$$KE_R=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(8)^2=8J$$

مثال (3)

أنبوبٌ مُجوّفٌ وأسطوانةٌ مُصمَتة، متماثلان في الكتلة والأبعاد، ويدور كلٌّ منهما حول محورٍ مماثلٍ بالسرعة الزاويّة نفسها. هل لهما الطاقة الحركية الدورانيّة نفسها أم لا؟ أوضّح إجابتي.

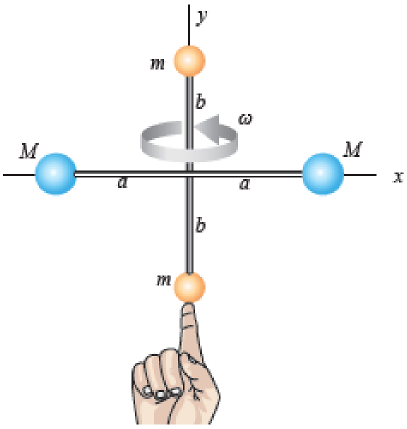
الحل

لا لإن عزم القصور الذاتي لكل منهما مختلف عن الاخر حيث أن الانبوب المجوف عزم القصور الذاتي له أكبر منه للأسطوانة المصمتة وبتالي وحسب قانون الطاقة الحركية الدورانية فالأنبوب المجوف طاقته الحركية أكبر من الأسطوانة المصمتة.

مثال (4)

نظامٌ يتكوّن من أربع كراتٍ صغيرةٍ مثبّتةٍ في نهايات قضيبين مُهمَلي الكتلة. ويدور النظام حول محور (y) كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور بسرعةٍ زاويّةٍ مقدارُها $(2rad/s)$ إذا علمتَ أنّ $(a=b=20cm)$ و $(m=50g)$ و $(M=100g)$ وأنصاف أقطار الكرات مهملةً مقارنةً بطولي القضيبين؛ بحيث يُمكن عدُّها جُسيماتٍ نقطيّة؛ أحسب مقدار ما يأتي:

1. عزم القصور الذاتي للنظام.
2. الطاقة الحركية الدورانية للنظام.



الحل

المعطيات: $M=0.1kg \quad m=0.05kg \quad a=b=0.2m \quad \omega=2rad/s$

1

ألاحظ أن عزم القصور الذاتي للكرتين (m) يساوي صفر ؛ لأنهما تقعان على محور الدوران (Y)

$$\sum I = I_1 + I_2$$
$$\sum I = Mb^2 + Mb^2 = 2Mb^2$$
$$\sum I = 2(0.1)(0.2)^2 = 8\times10^{-3} kg.m^2$$

2

$$KE_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(8\times10^{-3})(2)^2 = 16\times10^{-3} J$$

مثال (5)

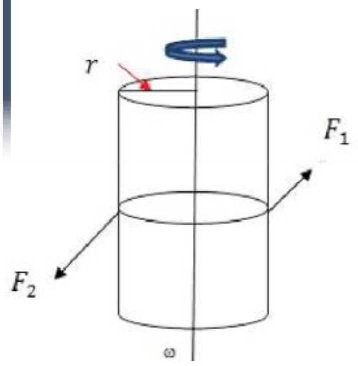
احسب الطاقة الحركية الدورانية لجسم عزم قصوره الذاتي $(1kg.m^2)$ يدور بمعدل (3) دورات في الثانية.

الحل

$$\omega = 3\times2\pi = 6\pi$$
$$KE = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times1\times(6\pi)^2 = 18\pi^2 J$$

مثال (6)

أحسب الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانة الموضحة في الشكل المجاور بعد ثانيتين من بدء حركتها من السكون تحت تأثير قوتين $(F_1=5N)$, $(F_2=7N)$ علما بأن عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول محور الدوران $(2kg.m^2)$ ونصف قطر قاعدتها $(0.5m)$



الحل

$$\sum\tau=\tau_1+\tau_2$$
$$=r\,F_1\sin\theta+r\,F_1\sin\theta$$
$$=(0.5\times5\times\sin90)+(0.5\times7\times\sin90)$$
$$=6N.m$$
$$\sum\tau=I\alpha$$
$$\alpha=\frac{\sum\tau}{I}=\frac{6}{2}=3rad/s^2$$
$$\alpha=\frac{\omega_f-\omega_i}{\Delta t}$$
$$3=\frac{\omega_f-0}{2}\quad\Rightarrow\Rightarrow\quad\omega_f=6rad/s$$
$$KE=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\times2\times(6)^2=36J$$

2 الزخم الزاوي

تمهيد ....

كما أن للجسم الذي يتحرك حركة انتقالية زخم يسمى الزخم الخطي كذلك الأمر يوجد للجسم الذي يتحرك حركة دورانية زخم يسمى الزخم الزاوي.

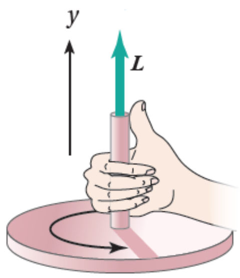
التعريف

الزخم الزاوي : كمية متجهة تساوي حاصل ضربِ عزم القصور الذاتي للجسم أو النظام في سرعته الزاويّة. رمزه (L) ووحدة قياسه $(kg.m^2/s)$ حسب النظام الدولي للوحدات.

$$\boxed{L = I\omega}$$

ملاحظات هامة....

1. انتبه لوحدة القياس في الزخم خطي هي $(kg.m/s)$ أما في الزخم الزاوي فهي $(kg.m^2/s)$
2. الزخم الزاوية كمية متجهة اتجاهها باتجاه السرعة الزاوية للجسم.
3. إشارة الزخم الزاوي تعتمد على اتجاه دوران الجسم حيث أن ...
   الزخم الزاوي الموجب : يعني أن الجسم يتحرك بعكس حركة عقارب الساعة
   الزخم الزاوي السالب: يعني أن الجسم يتحرك باتجاه حركة عقارب الساعة
4. تذكر لمعرفة اتجاه السرعة الزاوية والتي تمثل اتجاه الزخم الزاوي نستخدم قاعدة قبضة اليد اليمنى كما في الشكل المجاور

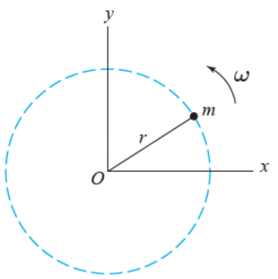


السؤال 1 علام يعتمد مقدار الزخم الزاوي؟

الجواب: 1 مقدار السرعة الزاوية للجسم 2 مقدار عزم القصور الذاتي للجسم.

مثال (1)

يتحرّك جُسيمٌ كتلته $(50g)$ حول محورٍ ثابتٍ (z) عند النقطة (o) في مسارٍ دائريٍّ نصفُ قطره $(20cm)$ بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتةٍ مقدارُها $(5rad/s)$ بعكس اتّجاه دوران عقارب الساعة، كما هو موضّحٌ في الشكل أحسبُ مقدار الزخَم الزاويّ للجُسيم حول هذا المحور، وأحدّدُ اتّجاهه.



الحل

المعطيات: $r = 20cm = 0.2m$ $\quad m = 50g = 0.05kg$ $\quad \omega = 5rad/s$

بما أن حركة الجسم عكس عقارب الساعة فازخم الزاوي موجب.

$$I = mr^2 = (0.05)(0.2^2) = 2\times10^{-3}\ kg.m^2$$

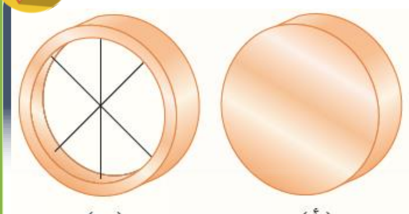
$$L = I\omega = (2\times10^{-3})(5) = 10\times10^{-3} Kg.m^2/s$$

ولتحديد الاتجاه نستخدم قاعدة قبضة اليد اليمنى

حيث أن الأصابع تتحرك بعكس اتجاه حركة قارب الساعة ويشير الابهام باتجاه خرج من الصفحة $(z+)$

مثال (2)

يبيّنُ الشكل المجاور أسطوانتين إحداهما مُصمَتةٌ والأخرى مُجوّفة، متماثلتين في الكُتلة والأبعاد والسرعة الزاويّة، وتدوران حول محورٍ ثابتٍ يمرُّ في المركز الهندسي لكلٍّ منهما. مستعينًا بالشكل المجاور؛ أجيب عن السؤالين الآتيين



1. أقارنُ بين مقداري الزخَم الزاويّ للأسطوانتين. هل هما متساويان أم لا؟ أفسّر إجابتي.
2. أقارنُ بين مقداري الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانتين. هل هما متساويان أم لا؟ أفسّر إجابتي

الحل

1. الأسطوانة المفرغة لها عزم قصور ذاتي أكبر من الأسطوانة المصمتة لان كتلتها تتوزع بعيدا عن محور دورانها وبتالي فإن الزخم الزاوي للأسطوانة المفرغة أكبر منه للأسطوانة المصمتة لإنه عزم القصور الذاتي لها أكبر ولهما نفس السرعة الزاوية
2. الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانة المفرغة أكبر لان عزم قصورها الذاتي أكبر منها للأسطوانة المصمتة

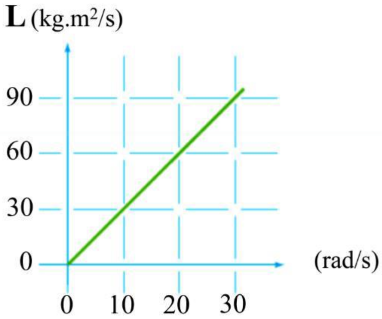
مثال (3)

يتحرك جسم عزم قصوره الذاتي $(2kg.m^2)$ حول محور ثابت بسرعة زاوية مقدارها $(4rad/s)$ احسب التغير في الزخم الزاوي للجسم تصبح سرعته الزاوية $(6rad/s)$

الحل

$$\Delta L = L_f - L_i$$
$$= I(\omega_f - \omega_i)$$
$$= 2(6-4)$$
$$= 4kg.m^2/s$$

مثال (4)



يبين الشكل المجاور ، التمثيل البياني للعلاقة بين الزخم الزاوي لجسم يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت وسرعته الزاوية

معتمدا على الشكل أجب عما يلي :

1 ما الذي يمثله ميل الخط المستقيم ؟

2 ما الكمية الفيزيائية التي تمثله المساحة المحصورة تحت المنحنى ؟

3 أحسب عزم القصور الذاتي للجسم .

4 أحسب الطاقة الحركية الدورانية للجسم عندما تكون سرعته الزاوية $(2 rad / s)$

الحل

1)

$$slope = \frac{L}{\omega} = I$$

الميل يمثل عزم القصور الذاتي للجسم

2 تمثل الطاقة الحركية الدورانية للجسم

3)

$$I = slope = \frac{90-0}{30-0} = 3 kg.m^2$$

4)

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 2^2 = 6J$$

مثال (5)

أثبت أن الطاقة الحركية الدورانية لجسم عزم قصوره الذاتي (I) وزخمه الزاوي (ω) تعطى بالعلاقة : $KE = \frac{L^2}{2I}$

الحل

$$\omega = \frac{L}{I}$$

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{L}{I}\right)^2 = \frac{L^2}{2I}$$

مثال (6)

أثبت أن الطاقة الحركية الدورانية لجسم عزم قصوره الذاتي (I) وزخمه الزاوي (ω) تعطى بالعلاقة : $KE = \frac{1}{2} L \omega$

الحل

$$I = \frac{L}{\omega}$$

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\omega}\right) \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega$$

مثال (7)

أحسب الزخم الزاوي لكرة عزم قصورها الذاتي $(3kg.m^2)$ تتحرك حركة دورانية حول محور ثابت بطاقة حركية دورانية مقدارها $(6J)$

الحل

$$KE=\frac{L^2}{2I}$$

$$6=\frac{L^2}{2\times 3}\quad\Rightarrow\Rightarrow\quad L=6kg.m^2/s$$

مثال (8)

جسمان (A,B) إذا كان عزم القصور الذاتي للجسم (A) أربعة أضعاف عزم القصور الذاتي للجسم (B) وهما نفس الطاقة الحركية الدورانية فما النسبة بين الزخم الزاوي للجسم (A) والزخم الزاوي للجسم (B)

الحل

$$KE_A=KE_B$$

$$\frac{1}{2}I_A\omega_A^2=\frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

$$4I_B\omega_A^2=I_B\omega_B^2$$

$$\frac{\omega_A^2}{\omega_B^2}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\Rightarrow\quad\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{I_A\omega_A}{I_B\omega_B}=\frac{4I_B}{I_B}\times\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{2}{1}$$

☑ الزخَم الزاويّ والعزم

في الحركة الانتقالية ينص قانون نيوتن الثاني على ان المعدل الزمني لتغير الزخم الخطي لجسم يساوي القوة المحصلة المؤثرة في ذلك الجسم كذلك الأمر في الحركة الدوراني يمكن صياغة علاقة بين العزم المحصل المؤثر في الجسم وزخمه الزاوي على النحور التالي:

" العزم المحصل المؤثر في جسم يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت يساوي المعدل الزمني للتغير في زخمه الزاوي حول نفس المحور "

$$\boxed{\sum \tau = \frac{dL}{dt}}$$

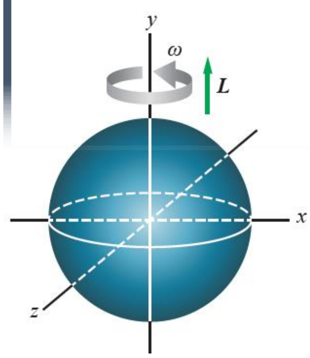
عند حدوث تغير في الزخم الزاوي (ΔL) خلال فترة زمنية مقدارها (Δt) يمكن إعادة صياغة القانون السابق على النحو التالي:

$$\boxed{\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}}$$

استنتاج هام .... لا يتغير مقدار الزخم الزاوي للجسم يتحرك حركة دورانية إلا عندما يتأثر بعزم محصل.

مثال (9)

كرةٌ مُصمَتة منتظمةٌ متماثلةٌ كتلتُها $(5kg)$ ونصفُ قطرِها $(10cm)$ تتحرّك حركةً دورانيّةً حول محورٍ ثابتٍ (محور (y)) يمر في مركزِها بسرعةٍ زاويّة ثابتةٍ مقدارُها $(20rad/s)$ بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة عند النظر إليها من الأعلى كما في الشكل المجاور احسب



1 مقدار الزخم الزاوي للكرة حول هذا المحور وأحدد اتجاهه.

2 مقدار العزم المحصل الازم لزيادة سرعة الكرة إلى $(40rad/s)$ خلال $(5s)$

الحل

المعطيات: $r = 0.1m$ $m = 5kg$ $\omega = 20rad/s$

1

$$I = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{2}{5}(5)(0.1^2) = 2\times10^{-2}\ kg.m^2$$

$$L = I\omega = (2\times10^{-2})(20) = 0.4\,Kg.m^2/s$$

الزخَم الزاويّ للكرة موجبٌ، إذ يكون اتّجاه الزخَم الزاويّ باتّجاه محور (y) الموجب عند النظر إليها من أعلى لأنّ الكرة تدور بعكس اتّجاه حركة عقارب الساعة كما يبدو للناظر

2

$$\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I(\omega_f - \omega_i)}{\Delta t} = \frac{(2\times10^{-2})(40-20)}{5} = 8\times10^{-2}\,N.m$$

مثال (10)

يدور قرص كتلته $(40kg)$ ونصف قطره $(0.5m)$ بسرعة زاوية $(10rad/s)$ إذا توقف خلال $(10s)$ علما بأن عزم القصور الذاتي للقرص يساوي $\left(\frac{1}{2}mr^2\right)$ احسب العزم المحصل المؤثر في القرص خلال هذه الفترة الزمنية

الحل

$$I=\frac{1}{2}mr^2=\frac{1}{2}\times 40\times 0.5^2=5kg.m^2$$

$$\sum\tau=\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{I\left(\omega_f-\omega_f\right)}{\Delta t}=\frac{(5)(0-10)}{10}=-5N.m$$

مثال (11)

يتناقص الزخم الزاوي لإطار قصوره الدوراني $(0.2kg.m^2)$ من $(5kg.m^2/s)$ إلى $(2kg.m^2/s)$ خلال $(1.5s)$ احسب كلا من:

1. متوسط العزم المؤثر على الإطار
2. التسارع الزاوي للإطار

الحل

❶
1)

$$\sum\tau=\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{L_2-L_1}{\Delta t}=\frac{2-5}{1.5}=-2N.m$$

❷

$$\sum\tau=I\alpha$$

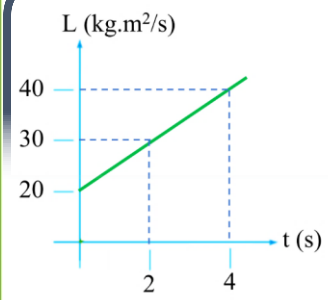
$$\alpha=\frac{\sum\tau}{I}=\frac{-2}{0.2}$$

$$=-10rad/s^2$$

مثال (12)

يمثل الشكل المجاور منحنى العلاقة بين الزخم الزاوي والزمن لجسم يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت. أجب عما يأتي :

1. ماذا يمثل ميل الخط المستقيم ؟
2. أحسب مقدار العزم المؤثر في الجسم .



الحل

❶

$$slope=\frac{\Delta L}{\Delta t}=\sum\tau$$

❷

$$\sum \tau = \frac{40-20}{4-0} = 5N.m$$

مسائل إضافية

وحدة قياس الزخَم الزاويّ حسب النظام الدولي للوحدات هي

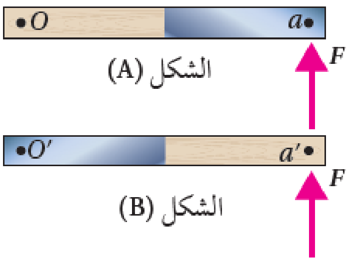
أ $N.m/s$ ب $Kg.m/s$ ج N/s د $kg.m^2/s$

كرةٌ مُصمَتةٌ وكرةٌ مجوّفة، لهما الكتلة نفسُها ونصفُ القطر نفسه، تدوران بمقدار السرعة الزاويّة نفسه. أيُّ الكرتين مقدارُ زخَمها الزاويّ أكبر؟

أ الكرة المُصمَتة ب الكرة المجوّفة. ج لهما مقدار الزخَم الزاويّ نفسه د لا يُمكن معرفة ذلك

أقرأ الفقرة الآتية، ثم أجيب عن السؤالين $(??,??)$

يوضّح الشكل المجاور مسطرةً متريّةً نصفُها خشبٌ ونصفُها الآخر فولاذ. بدايةً؛ المسطرة قابلةٌ للدوران حول محورٍ عموديٍّ عليها عند نهايتها الخشبيّة (النقطة (O)) انظر الشكل (A) وأثرت فيه بقوة (F) عند نهايتها الفولاذية النقطة (a) بعد ذلك؛ جعلتُ المسطرة قابلةً للدوران حول محورٍ عموديٍّ عليها عند نهايتها الفولاذيّة النقطة (O')أنظر الشكل (B) وأثرت فيه بقوة (F) نفسها عند نهايتها الخشبية النقطة (a')



الشكل (A)

الشكل (B)

أيُّ العلاقات الآتية صحيحةٌ لعزمَي القصور الذاتي للمسطرتين حول محوري دورانهما؟

أ $I_A > I_B$ ب $I_A < I_B$ ج $I_A = I_B$ د $I_A = I_B = 0$

أيُّ العلاقات الآتية صحيحةٌ حول مقداري التسارُع الزاويّ للمسطرتين حول محوري دورانهما؟

أ $\alpha_A > \alpha_B$ ب $\alpha_A < \alpha_B$ ج $\alpha_A = \alpha_B$ د $\alpha_A = -\alpha_B$

☑ حفظ الزخم الزاوي

عندما يكون العزم المحصل المؤثر على جسم أو نظام يتحرك حركة دورانية يساوي صفر فإن مقدار الزخم الزاوي لهذا الجسم أو النظام يظل ثابت في المقدار والاتجاه ولا يتغير مع مرور الزمن وهذا يعني أن الزخم الزاوي محفوظ.

نص القانون

الزخم الزاوي لنظام معزول يظل ثابت في المقدار والاتجاه

$$L_f = L_i = \text{ثابت}$$

ملاحظات هامة....

1. النظام المعزول هو النظام الذي يكون العزم المحصل المؤثر عليه يساوي صفر
2. إذا اعيد ترتيب كتلة الجسم أو النظام الذي يتحرك حركة دورانية فإن عزم القصور الذاتي له يتغير وبتالي لا بد للسرعة الزاوية أن تتغير بشكل عكسي حتى يبقى الزخم الزاوي ثابتاً

توضيح....

في الشكل التالي متزلج على الجليد يتحرك حركة دورانية حول محور عمودي على سطح الأرض ويمر بمركز كتلته، بالاعتماد على الشكل أجب عما يلي:

1. هل يمكن اعتبار المتزلج نظام معزول ؟؟

يمكن اعتبار المتزلج نظام معزول حيث أن قوة الوزن والقوة العامودي تؤثران باتجاه رأسي وبتالي فأن عزم كل منهما حول محور الدوران يساوي صفر وكذلك قوة الاحتكاك بين قدمي المتزلج والأرض صغيرة جدا لدرجة الإهمال لذلك فالعزم الكلي المؤثر في النظام يساوي صفر

2. هل الزخم الزاوي للنظام معزول؟

بما أن العزم المحصل المؤثر على المتزلج يساوي صفر فالزخم الزاوي محفوظ

3. فسر ماذا يحدث لسرعة المتزلج الزاوية عندما يضم ذراعيه كما في الشكل المجاور

عندما يضم المتزلج ذراعي فإن توزيع كتلته يصبح أقرب إلى محور دورانه وبتالي فإن عزم القصور الذاتي له سوف يقل وحتى يبقى الزخم الزاوي له ثابت لا بد لسرعته أن تزداد .

مثال (13)

ثلاثة أطفال كتلهم $(32kg\,,28kg\,,20kg)$ يقفون عند حافة لعبة دوّارة على شكل قرصٍ دائري منتظم كتلته $(M=100kg)$ ونصف قطره $(r=2m)$ ويدور بسرعةٍ زاويّةٍ ثابتة مقدارها $(2rad/s)$ حول محور دوران ثابت عموديّ على سطح القرص ويمرُّ في مركزه باتّجاه محور (y) تحرّك الطفل الذي كتلته $(20kg)$ ووقف عند مركز القرص. أحسبُ مقدار السرعة الزاويّة الجديد للعبة الدوّارة

الحل

المعطيات: $m_1=32kg \quad m_2=28kg \quad m_3=20kg \quad M=100kg \quad r=2m \quad \omega=2rad/s$

يمكن اعتبار النظام المكون من القرص والأطفال نظام معزول حيث أنه لا يوجد عزم محصل يؤثر على النظام ولذلك فإن الزخم الزاوي محفوظ

أولا نجد الزخم الزاوي للنظام قبل أن يتحرك الطفل.

$$I=I_1+I_2+I_3+I_{disc}$$

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\frac{1}{2}Mr^2$$

$$I=(32)(2^2)+(28)(2^2)+(20)(2^2)+\frac{1}{2}(100)(2^2)=520\,kg.m^2$$

$$L=I\times\omega_i=520\times2=1040\,kg.m^2/s$$

عندما يتحرك الطفل عند مركز العربة فإن عزم القصور الذاتي الناتج عنه يساوي صفر وبتالي فعزم القصور الذاتي للنظام سوف يقل دون ان يتغير الزخم الزاوي

$$I=I_1+I_2+I_{disc}$$

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+\frac{1}{2}Mr^2$$

$$I=(32)(2^2)+(28)(2^2)+\frac{1}{2}(100)(2^2)=440\,kg.m^2$$

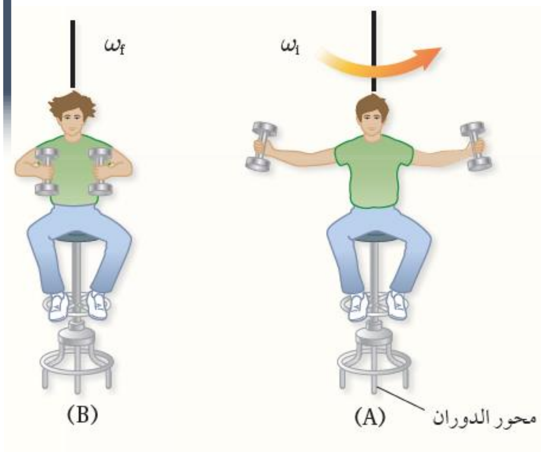
$$L=I\times\omega_i$$

$$1040=440\times\omega_f \quad\Rightarrow\omega_f=\frac{1040}{440}\simeq2.36\,\text{rad/s}$$

مثال (14)

يجلس طالبٌ على كرسيٍّ قابلٍ للدوران حول محورٍ رأسي، ويُمسك ثقلًا بكلِّ يد.
بدايةً؛ يدور الطالب والكرسيُّ بسرعةٍ زاويّة (ω_i) ويداه ممدودتان، كما هو موضحٌ في الشكل (A) إذا طلب المعلم من الطالب ضمّ ذراعيه؛ كما في الشكل (B) فماذا يحدث لكلٍّ من:

1. عزمُ قصوره الذاتي
2. سرعتهُ الزاويّة النهائية



الحل

1. عندما يضم الطالب ذراعيه فإن كتلته تتوزع بشكل أقرب إلى محور دورانه وبتالي فإن مقدار عزم قصوره الذاتي سوف يقل
2. بما أن الطالب والكرسي نظام معزول فإن زخمه الزاوي ثابت ولإن عزم قصوره الزاوي قل لا بد لسرعته الزاوية أن تزداد.

مثال (15)

يقفز غطّاس عن لوح غطسٍ مُتّجهًا نحو سطح الماء في البركة. ولاحظت أنّه بعد مغادرته لوح الغطس بدأ بالدوران، وضمَّ قدميه وذراعيه نحو جسمه. أجيب عمّا يأتي:

1. لماذا ضمّ الغطّاس قدميه وذراعيه نحو جسمه في أثناء أدائه لحركات الدوران؟
2. ما الذي يحدث لزخَمه الزاويّ بعد ضمّ قدميه وذراعيه؟
3. ما الذي يحدث لمقدار سرعته الزاويّة بعد ضمّ قدميه وذراعيه؟
4. ما الذي يحدثُ لمقدار طاقته الحركيّة الدورانية بعد ضمّ قدميه وذراعيه؟

الحل

1. لتقليل مقدار عزم قصوره الذاتي حيث يقل البعد بين كتلته ومحور دورانه، مّما يُمكّنه من الدوران بسرعة زاوية أكبر .
2. تؤثر قوة الجاذبية في مركز كتلته لذا لا ينشأ عنها عزم يؤثر في الغطّاس، ويكون العزم المحصّل المؤثر في الغطّاس صفر فيبقى زخمه الزاوي محفوظًا أي لا يتغير زخمه الزاوي؛ فنقصان عزم القصور الذاتي يقابله زيادة في السرعة الزاوية
3. العزم المحصّل المؤثر في الغطّاس صفراً فيبقى زخمه الزاوي محفوظًا؛ أي لا يتغير زخمه الزاوي، ويؤدي نقصان عزم القصور الذاتي له إلى زيادة مقدار سرعته الزاوية .
4. بعد ضم قدميه وذراعيه يقل عزم قصوره الذاتي بينما يزداد مقدار سرعته الزاوية بالنسبة نفسها؛ فإذا قلّ مقدار عزم القصور الذاتي بمقدار النصف يتضاعف مقدار سرعته الـ ا زوية مرّتان، وبما أن الطاقة الحركية الدورانية تتناسب طرديًا مع مربّع مقدار السرعة الزاوية فإن مقدار طاقته الحركية الزاوية يزداد .

مثال (16)

في أثناء مسابقة يدور مُتزلّجٌ على الجليد حول نفسه بسرعةٍ زاويّةٍ ابتدائية (ω_i) وفي نهاية العرض ضمّ المُتزلّج يديه نحو جسمه فأصبح مقدار عزم قصوره الذاتيّ النهائيّ مساويًا نصف مقدار عزم قصوره الذاتيّ الابتدائيّ. كم يُصبح مقدار سرعته الزاويّة النهائيّة مقارنةً بمقدار سرعته الزاويّة الابتدائيّة بإهمال تأثير عزم قوة احتكاك الزلاجات مع الجليد؟ أفسّر إجابتي.

الحل

المعطيات: $I_f = \frac{1}{2} I_i$

بما أن العزم المحصل المؤثر على المتزلج يساوي صفر فإن زخمه الزاوي محفوظ أي أن ..

$$L_f = L_i$$

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$\frac{I_i}{2} \omega_f = I_i \omega_i \quad \Rightarrow \omega_f = 2\omega_i$$

مثال (17)

تقفُ هناءُ على طرفِ القرص الدوّار للعبة الحصان الدوّار. إذا علمتُ أنّ كتلة قرص اللعبة بمحتوياته $(200kg)$ ونصفَ قطره $(4m)$ وسرعته الزاويّة $(2rad/s)$ وكتلة هناء $(50kg)$ وبافتراض أنّ كتلة القرص موزّعةٌ بشكلٍ منتظم، والنظام المكوّن من اللعبة وهناء معزول، أحسب مقدار ما يأتي:

1. الزخَم الزاويّ الابتدائي للنظام.
2. السرعة الزاويّة للّعبة عندما تقف هناء على بُعد $(2m)$ محور دوران اللعبة.

الحل

المعطيات: $M = 200kg \quad m = 50kg \quad r_M = 4m \quad r_m = 2m \quad \omega = 2rad/s$

1

$$I = I_M + I_m$$

$$I = \frac{1}{2} M r_M^2 + m r_M^2$$

$$I = \frac{1}{2}(200)(4^2) + (50)(4^2) = 2400\, kg.m^2$$

$$L = I \times \omega = (2400)(2) = 4800\, kg.m^2/s$$

2

$$I = I_M + I_m$$

$$I = \frac{1}{2} M r_M^2 + m r_m^2$$

$$I = \frac{1}{2}(200)(4^2) + (50)(2^2) = 1800\, kg.m^2$$

$$L = I \times \omega$$

$$4800 = (1800)(\omega) \quad \Rightarrow \omega = \frac{8}{3} \text{rad}/s$$

الاثراء والتوسع
(اتزان الجسور)

مقدمة ...

يتطلّب بناءُ المنشآت التي أراها؛ من جسور وسدودٍ ومبانٍ إلى ناطحات السحاب من المصمّمين والمهندسين المعماريين تحديدَ القوى المؤثرة في هياكلها وتراكيبها؛ للمحافظة عليها ثابتةً ومتزنةً سكونيًا وعدم انهيارها.

يراعي المصمّمون والمهندسون المعماريون في مراحل تصميم الجسور المختلفة وإنشائها تحقيقَ شرطي الاتّزان في مكوناتها جميعًا. ولتكون الجسورُ أنظمةً متّزنةً؛ يجب أخذُ قياساتٍ دقيقةً مضبوطةً لهذه القوى ومواقع دعامات الجسر والمسافات بينها ومقدار أكبر ثقل يُمكن أن يتحمّله الجسر دون أن ينهار.

القوة المؤثرة في الجسور

1. قوى ضغطٍ تجعلُها تنكمش وتتقلّص
2. قوى شدٍّ تجعلُها تتمدّد ويزداد طولها